00153306

01-4
32

数学与联想

戴维·韦尔斯 著　李志尧 译　单 墫 校 · 上海教育出版社



北航　C0621465

图书在版编目(CIP)数据

数学与联想:从开普勒到托姆的时间图景/(英)韦尔斯著;李志尧译.—上海:上海教育出版社,1999.3(2000.3重印)
(通俗数学名著译丛/史树中,李文林主编)
ISBN 7-5320-6266-X

Ⅰ.数… Ⅱ.①韦…②李… Ⅲ.数学-通俗读物 Ⅳ.01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第15793号

David Wells

Hidden Connections Double Meanings

Cambridge University Press

© Cambridge University Press 1988

根据剑桥出版社1992年第2版译出,
本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得

通俗数学名著译丛

数 学 与 联 想

[英]戴维·韦尔斯 著

李 志 尧 译

单 墫 校

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行
(上海永福路123号)
(邮政编码:200031)
各地新华书店经销 上海市印刷四厂印刷
开本850×1156 1/32 印张7.25 插页4 字数173,000
1999年3月第1版 2000年3月第3次印刷
印数6,201-11,200本
ISBN 7-5320-6266-X/G·6421 定价:(软精)10.70元

迎接2000数学年

陳省身 1997

H66/22

译丛序言

数学，这门古老而又常新的科学，正阔步迈向21世纪.

回顾即将过去的世纪，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志.因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要，在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面，20世纪数学思想的深刻变革，已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，门外汉往往只好望而却步.这样，提高数学的可接受度，就成为一种当务之急.尤其是当世纪转折之际，世界各国都十分重视并大力加强数学的普及工作，国际数学联盟(IMU)还专门将2000年定为**“世界数学年”**，其主要宗旨就是“使数学及其对世界的意义被社会所了解，特别是被普通公众所了解”.

一般说来，一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步，数学普及工作在我国也受到重视.早在60年代，华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读

物，激发了一代青少年学习数学的兴趣，影响绵延至今.改革开放以来，我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说，我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要在下世纪初率先赶超世界先进水平，数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务.为此，借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版，正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物，推动国内的数学普及与传播工作，为我国数学赶超世界先进水平的跨世纪工程贡献力量.丛书的选题计划，是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述，基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类，有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用；有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧；有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系；……等等，试图为人们提供全新的观察视角，以窥探现代数学的发展概貌，领略数学文化的丰富多采.

丛书的读者对象，力求定位于尽可能广泛的范围，为此丛书中适当纳入了不同层次的作品，以使包括大、中学生；大、中学教师；研究生；一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者，本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树，一个数学家对于他所研究的专业以外的领域，也往往深有隔行如隔山之感，也需要涉猎其他分支的进展，了解数学不同分支的联系.

需要指出的是，由于种种原因，近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气，有关选题逐年减少，品种数量不断下降.在这样的情况下，上海教育出版社以迎接2000世界数学年为契机，按照国际版权公约，不惜耗资购买版权，组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》，这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们，自愿抽出宝贵的时间来进行这类

通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作，同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物，在国内还不多见.我们热切希望广大数学工作者和科普工作者来关心、扶植这项工作，使《通俗数学名著译丛》出版成功.

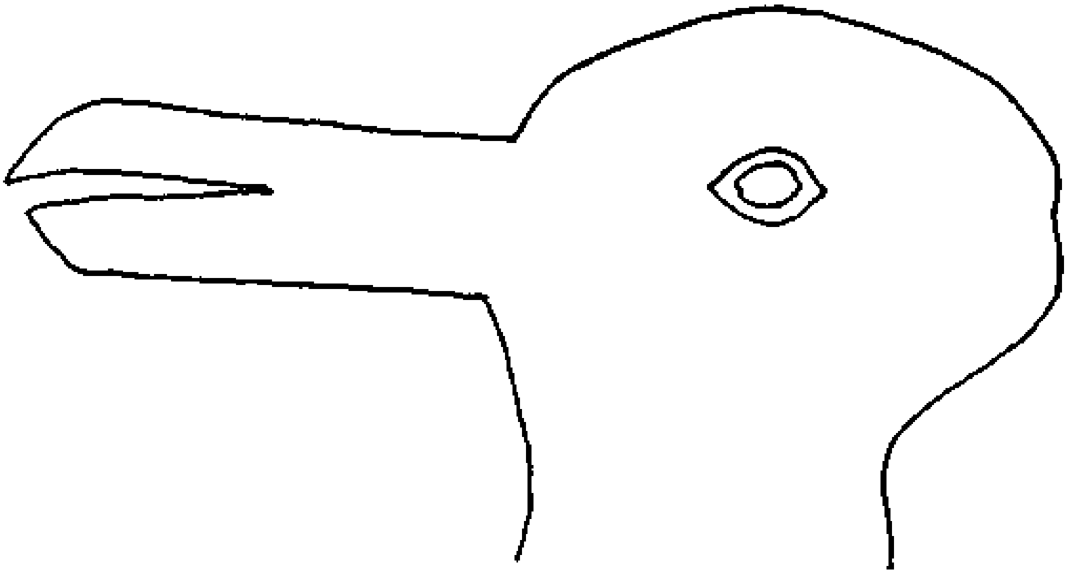
让我们举手迎接2000世界数学年，让公众了解、喜爱数学，让数学走进千家万户！

《通俗数学名著译丛》编委会

1997年8月

目　录

引言:数学,猜谜与幽默



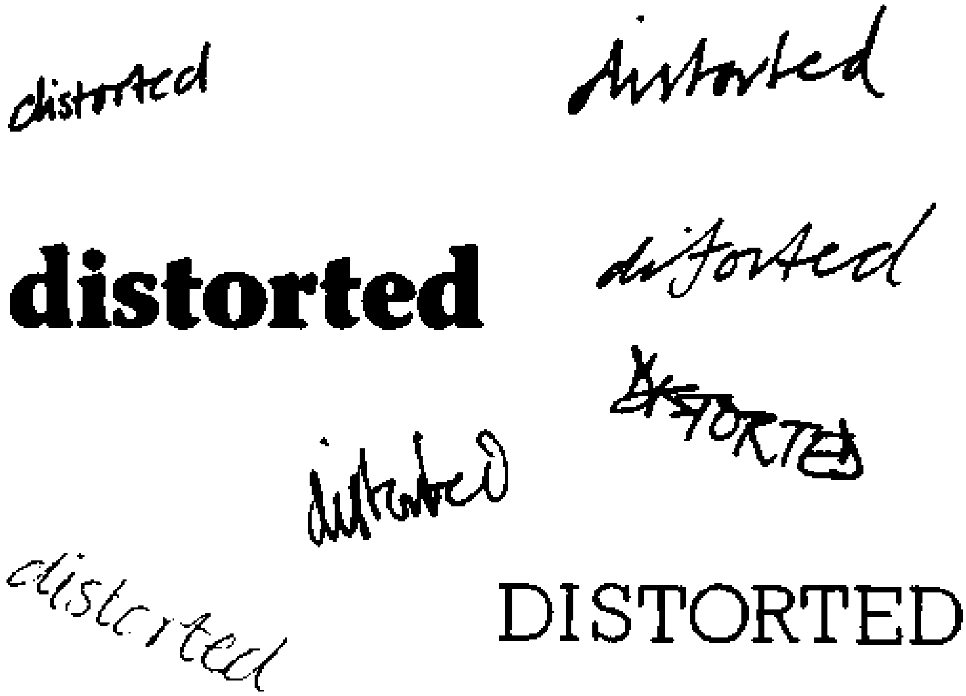
上图是心理学家贾斯特罗设计的.它是一只鸭子,还是一只兔子?或者两者都不是——只不过是在纸上画的几条线,我们的脑子把它想成鸭子或者兔子?

艺术尽是这种骗人的东西.事实上,所有传统艺术都依赖于这种幻觉.我们在平平的肖像画上“看见”一个人.作画的人用画刷蘸着颜色在画布的平面上画着,于是,我们看见一碗水果,或在风景中溜冰的人.我们多聪明啊!真的,我们的脑子极擅长于看到图与图之间的惊人的关系,或者以不同方式去看同一个图. [4]

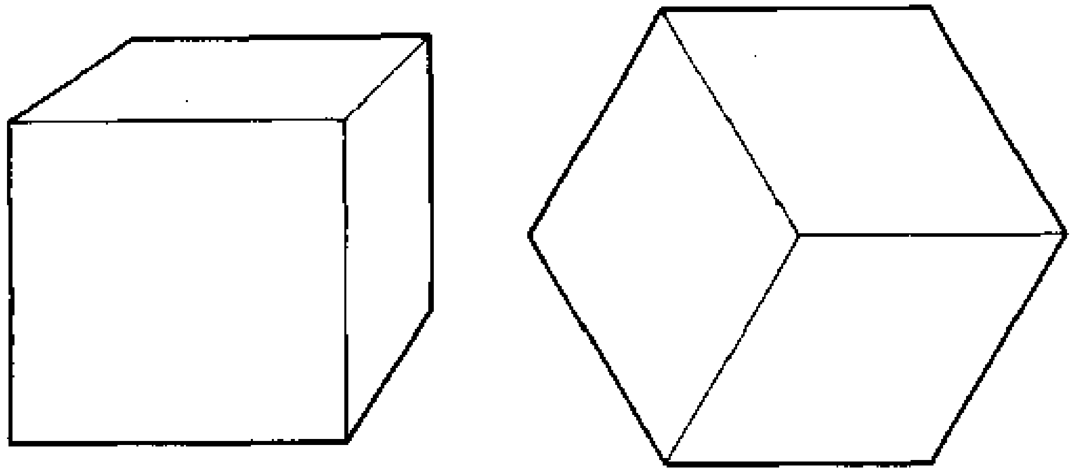
有时我们的脑子会欺骗我们,并把我们引入歧途.我们聪明反被聪明误.然而,如果没有天赋,我们就不可能去认识世界.



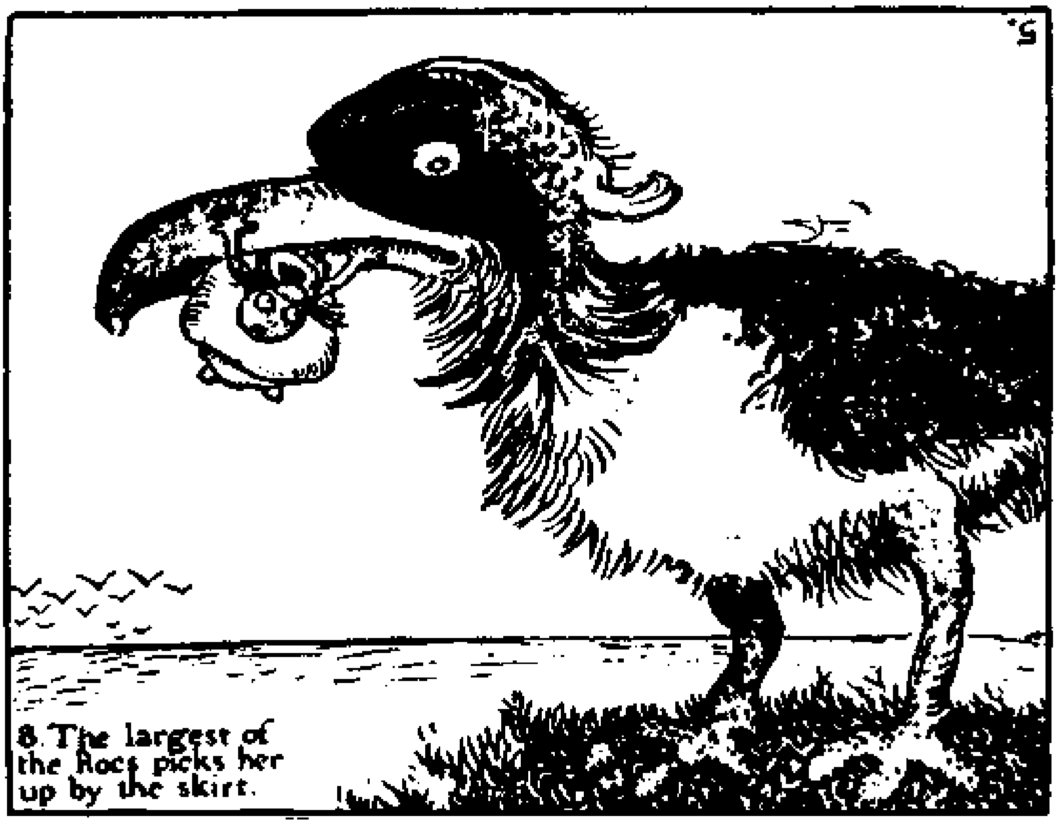
再如，在纸面上，清清楚楚这四个女人是不一样高的，可是我们怎么能“看出”她们“真的”是一样高的呢？



我们怎么能认出这些曲里拐弯的线是同一个字“distorted”[5] 呢？

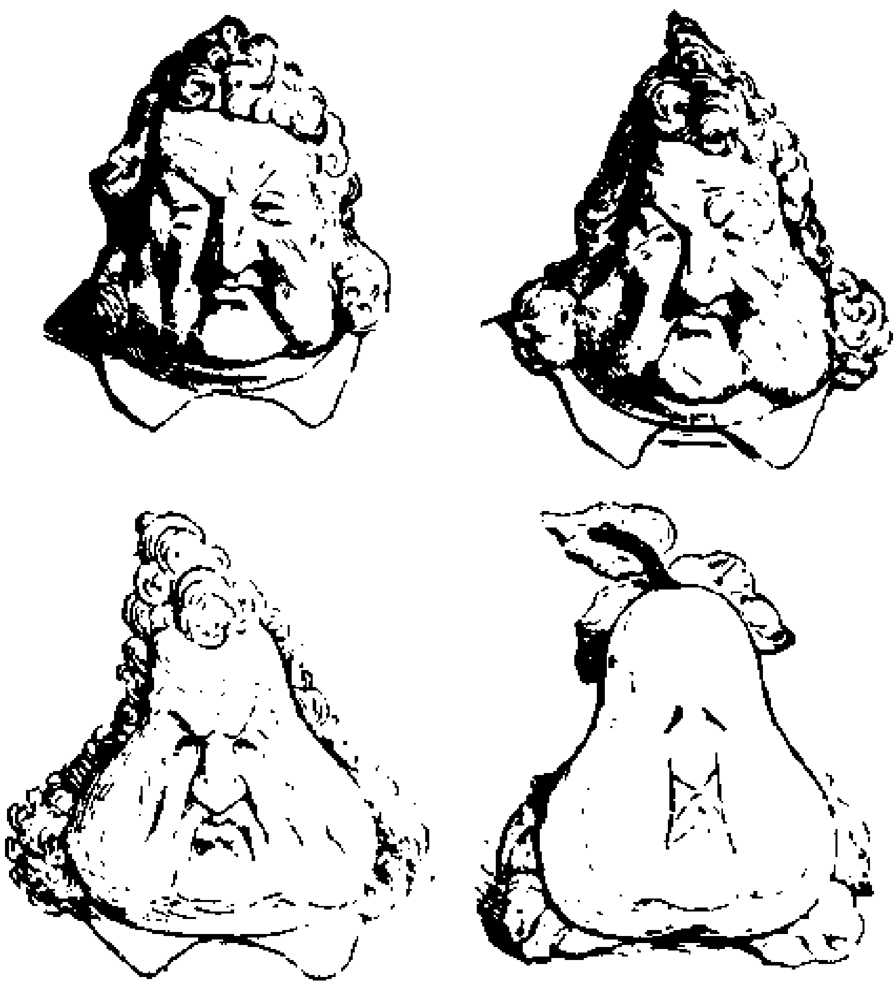


看的结果常常依赖于你怎么去看.只有从特殊的角度看,这个立方体像一个六边形.



(图中的英文为:"那个最大的鹏鸟衔住了她的裙子."——译者)

这幅画是古斯塔夫·弗皮克作的,它可以上下颠倒着看.不转过画面,你能看出这张图倒着看画的是什么? 不那么容易吧!虽然在画上有两个不同的图,但是只有一个是"面朝你的".[6]



19 世纪法国的漫画家把路易·菲利普的胖脑袋画成一个梨形，这有双重含义："梨"这个词也有傻瓜的意思．

这样多的幽默是在这种框架上形成的：语义双关，误解，不协调，出人意料，以及陌生外衣下的熟面孔．连最简单的谜语也有这些特征：

"什么东西又小又绿，以每小时 90 英里的速度呼啸着驶过一号公路？"在我是小学生的时候，答案是一部奥斯汀·海雷·斯普罗特．这种汽车现在成了古董，但儿童的创造是不会落空的．当今的答案是一种莴苣形的车艾拿恩！

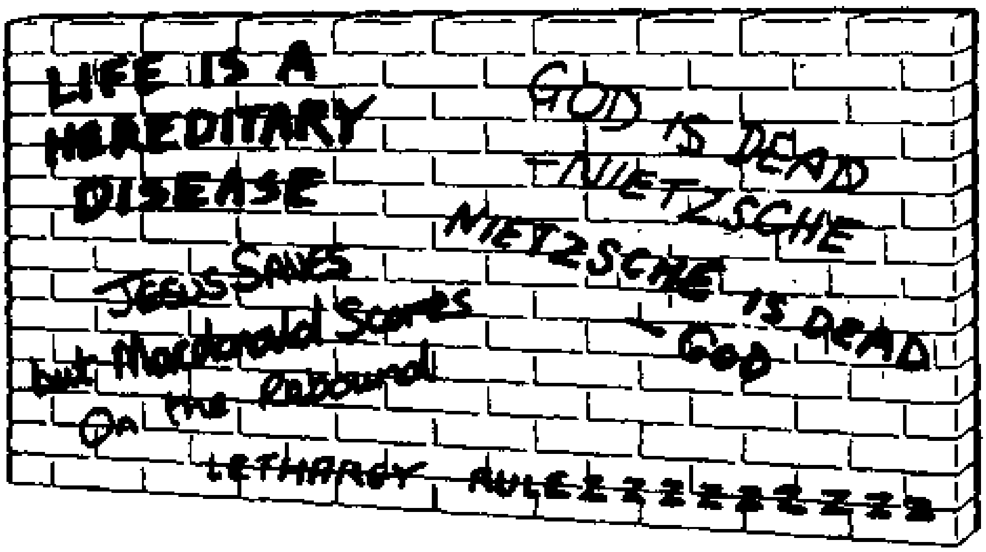
一些普通词汇的歧义一再地被利用：

“什么东西有四个轮子还会飞?”①“垃圾车!”

“记一下苍蝇飞的时间!”②“没办法——它们飞得太快了!”

妙语与幽默,一旦发现就会伴你一生.至今我还记得我听到过的第一个笑话,或更确切地说我懂得的第一个笑话.回想起来那时我觉得很兴奋.我有了一个重大发现.下面就是这个笑话:“一位女士对店员说:‘这只长统袜抽丝啦!’店员说:‘这种价钱你想买什么? 一架大理石的梯子吗?’”③今天的儿童会取笑说:“你把三个驼峰的骆驼叫什么?”“汉弗莱.”④

[7] 成年人声称不喜欢这种小玩笑,不过在1976年大旱期间,人人都取笑这句话:“节约用水——随朋友一起去洗澡.”甚至成年人也对墙上的乱涂乱画报以一笑.



(墙上所写的文字有:“生命是一种遗传的疾病”、“耶稣拯救——而麦当娜惊吓——在情绪波动时”、“上帝死了——尼采”、“尼采死了——上帝”、“没精打采——规则……”——译者)

① 英语中“飞”与“苍蝇”是同一个词.这句话也可理解为什么东西有四个轮子和许多苍蝇.——译者注

② 原文“Time flies!”也可译为“时光飞驰”.——译者注

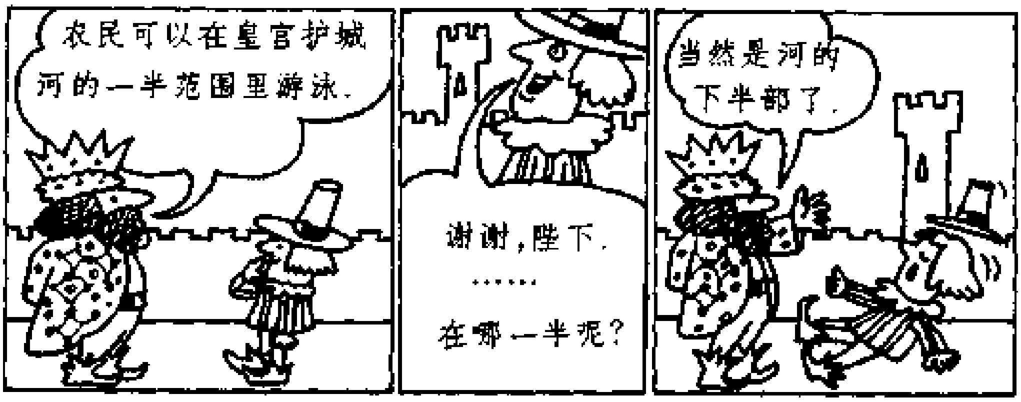
③ 英语中“梯子”与丝袜的毛病“抽丝”是一个词.——译者注

④ 英语中人名“汉弗莱”(Humphrey)的前一半是驼峰(hump),后一半的读音接近三(three).——译者注

即使谜语是真实的而不是杜撰的，不再天真的成年人也不喜欢猜谜，这是近代现象.可是从荷马生活的年代到我们英国维多利亚时代的曾曾祖父母，猜谜和说双关语曾是政治家和诗人的正经消遣.据说荷马就是因为未能解开一个谜而死的，这个谜是："捉住的，我们扔掉了；捉不住的，我们却留下了."（跳蚤！）

或许成年人矜持，或许他们愚蠢地羞于与儿童分享任何东西.在《卫报与欢乐时刻》共有的专栏连环漫画中，确实有许多双关语.

这一个有点数学味儿：



数学与谜语，与幽默有很多共同之处.数学中的每件东西有许多含义.每一个图和每一个符号，每一个和与每一个方程，都可以用不同的方式"看".英语或代数中的每一个句子都可以有不同的理解和解释.

这就是为什么数学强有力的一个理由.数学家发现，两个表面不同的问题实际上是相同的，因此他只要解决一个也就解决了另一个.认识到一百万个问题"实质上"都是相同的，因此，你只要解决一个就解决了一百万个.事实上，这就是力量！[8]

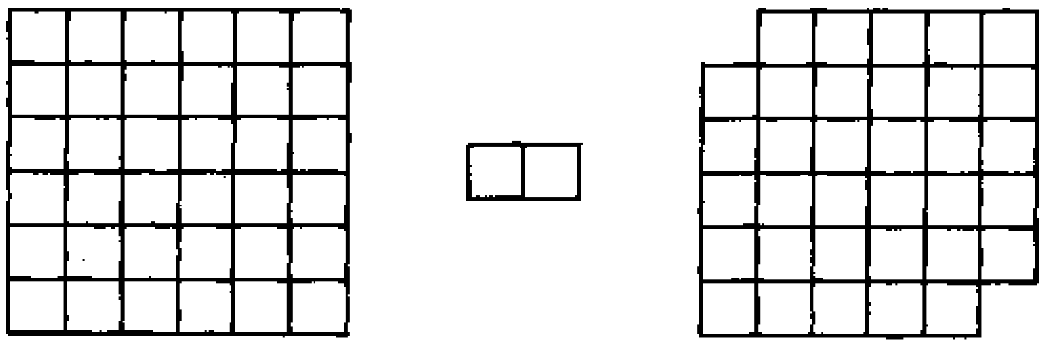
数学、猜谜和幽默还有其他的共同点.它们都有类似的让人激动的地方.当然，幽默是快的，没有一个人为用一个小时才明白的笑话发笑.一个笑话如果需要解释，这对喜剧演员和听众来说都是尴尬的.猜谜难些.数学——以及科学——那就更难了，

但也更有趣了.

看看正在解题的人.当结果快要产生时,注意他们的表情!他们很可能微露笑容,甚或大声地笑起来!在我还是个儿童时,我解过一道棘手的题,我坐不住了,站起来,激动地在房间里踱来踱去,或者出去弄点东西吃.我现在还想得起那时的举动.

这本书写的是用"看"的方法去猜数学谜语,有时用眼睛看,有时不用眼睛看."看"是一个比喻,这个"看"并不总是它的字面含义.我们可以用脑子,用心看.按照难以理解的神秘方式,我们的头脑下意识地工作,推理,找联系,常常使我们大吃一惊.

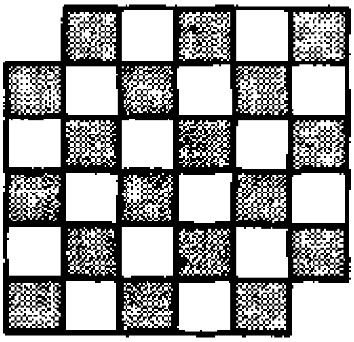
下面的古典问题,给我们第一个机会细细地观察解题的过程.

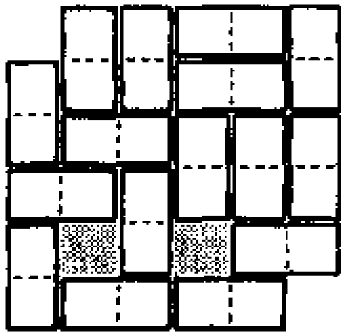


能用 18 块图中的小骨牌填满左边的正方形吗? 能,很容易,将每一行用排成一条直线的三张骨牌去填就行了.对右边那个缺两个角的正方形呢? 用块数少 1 的同样的骨牌能填满它吗? 试试看并做出判定.

这个难题的秘密在于把正方形看作一个棋盘①,在它的角上缺两个白的方格.可以看出,任何一张骨牌不管怎么放,不管把它放在哪里,都盖住一个黑格和一个白格.

① 国际象棋的棋盘,上面的方格黑白相间.——译者注



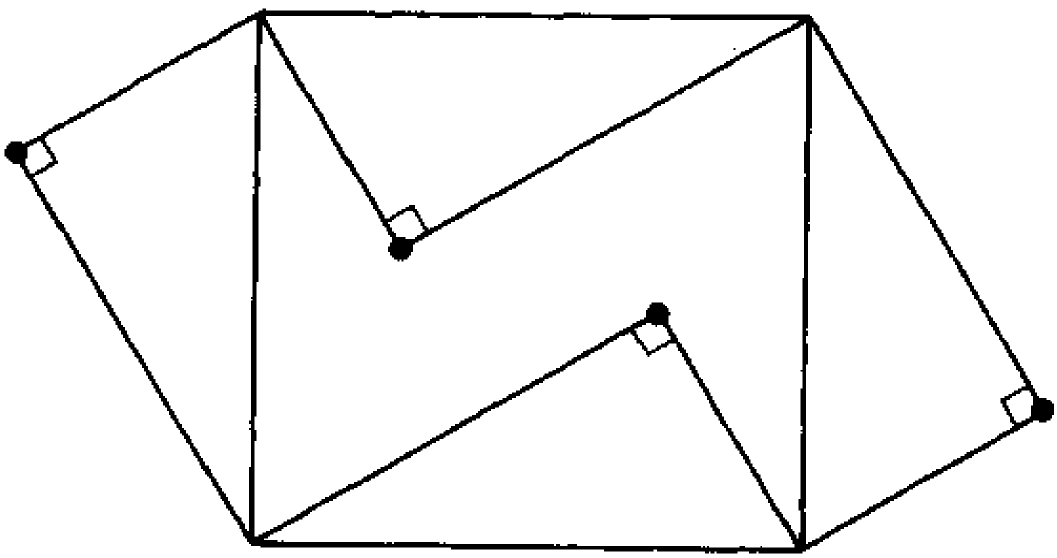


因此我们可以确信不管做多少次尝试，那个缺两个角的图形永远也不可能被覆盖．右边的图只是对不太相信的人进一步证实，在这种盖法中那多出的两块黑格是盖不上的！

[9]

问题

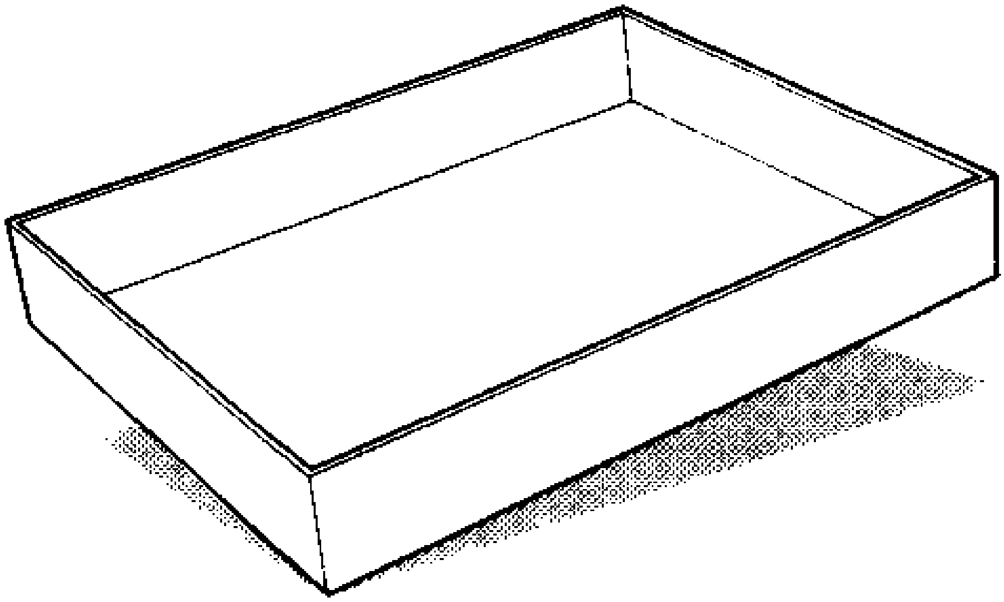
1．



四个全等的直角三角形加到一个正方形上，两个在正方形内，两个在正方形外．用一把直尺就可以证实四个有标记的点在同一条直线上——但为什么？

2．一个不透明的立方体，你一次最多能看到几个面？

3．长方盒子的一个顶点在桌面上，底面的另外三个顶点离开桌面的高度之间有什么关系？



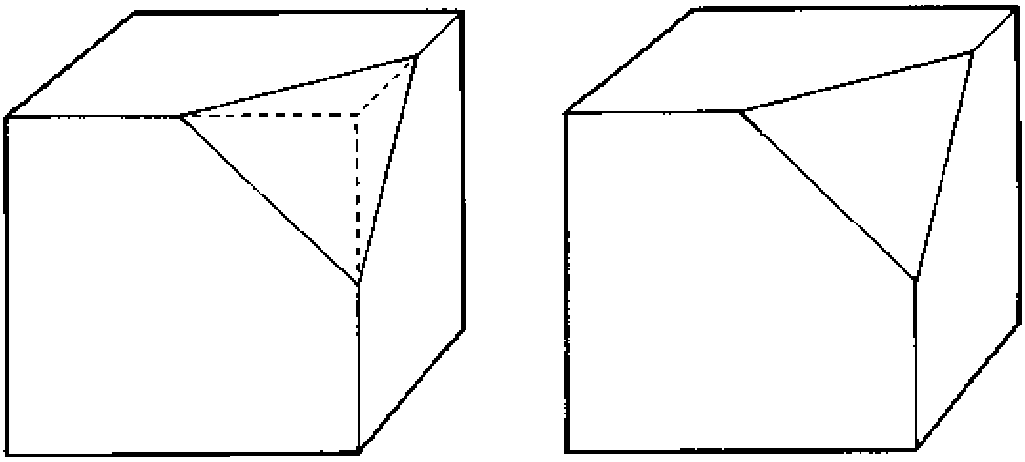
[10]

4. 这是一种从 482 中减去 153 的非常规的方法:

$$\begin{array}{rrr} 482 & & 282 \\ \underline{153} & & \underline{47} \\ & & 329 \end{array}$$

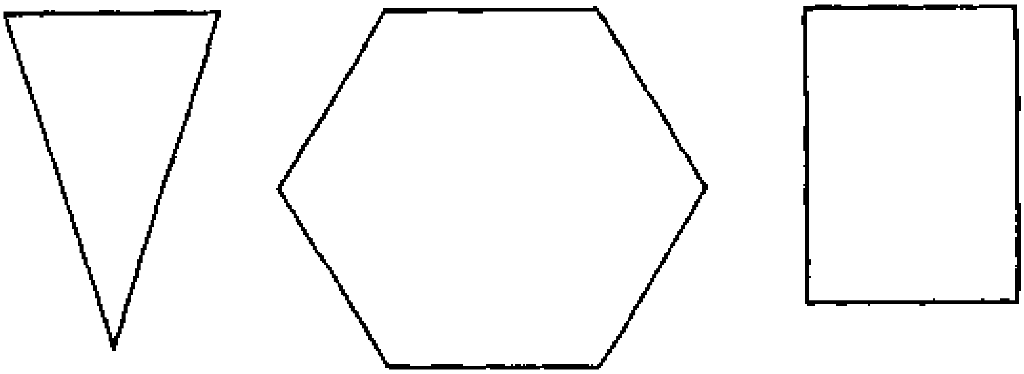
这个方法是怎么算的?

5.

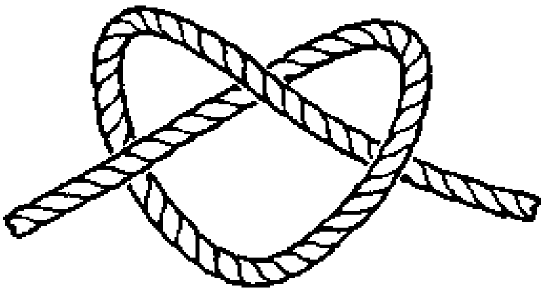


用刀切去正方体的一个角就会出现一个新的面,上面的两个图表示切出一个等边三角形的方法.

下列图形中,哪一个也能通过切正方体得出来?(用一小块立方体的奶酪来做几个实验也许是有帮助的!)

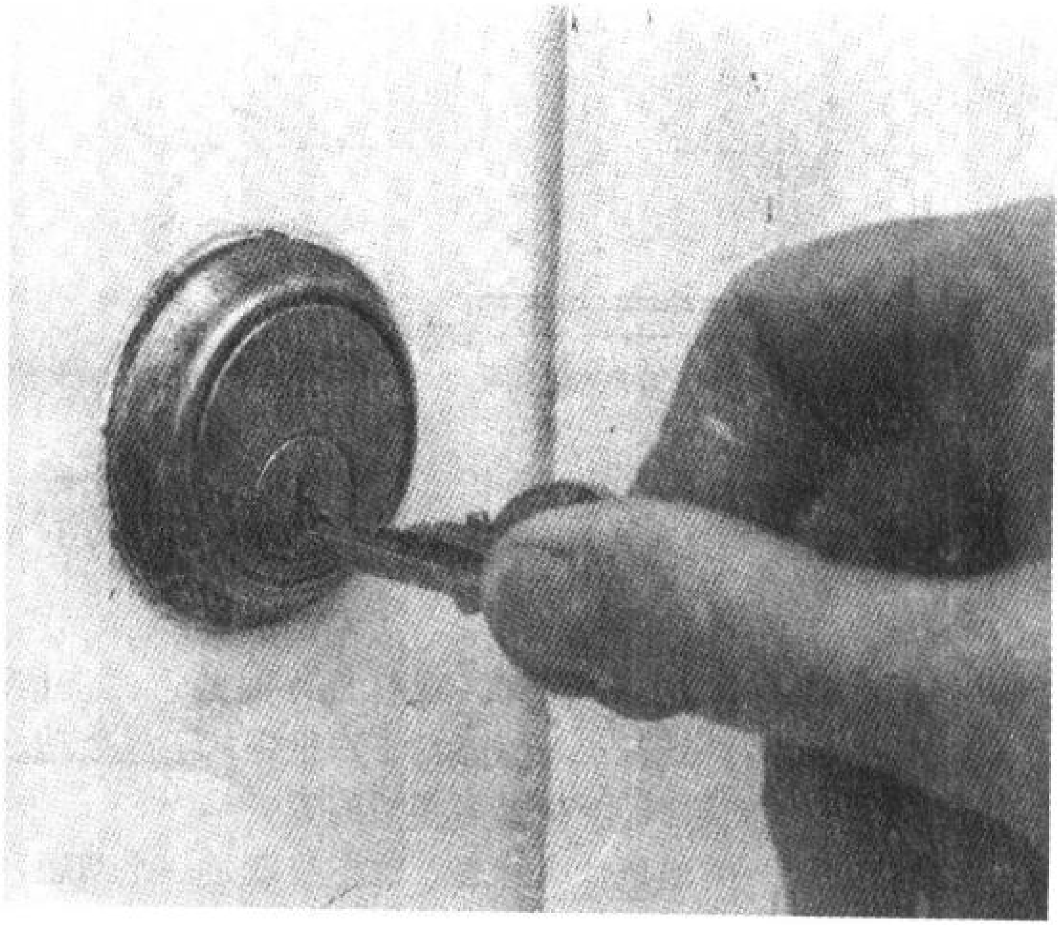


6．用一条又长又薄、两边平行的纸带打出下面的结，然后小心地压平，会出现什么样的正多边形？

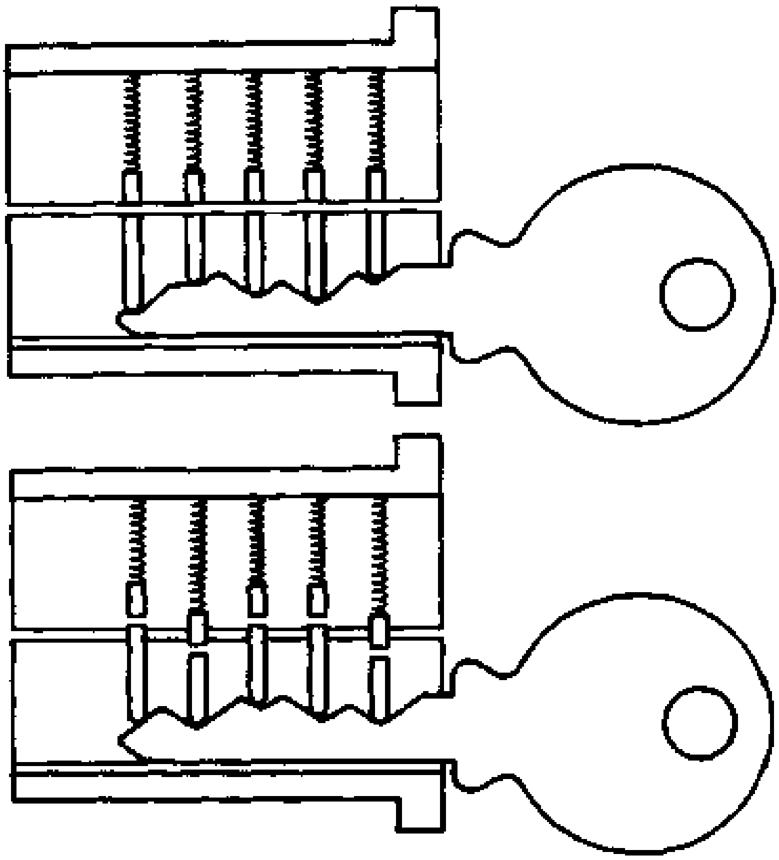


[11]

第1章 揭开表象



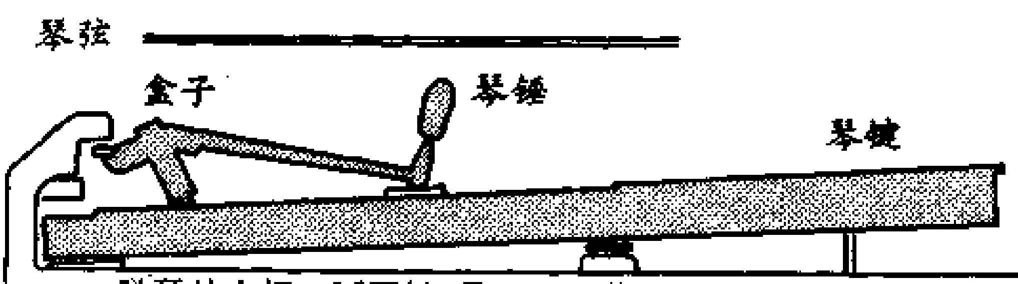
这里是一把钥匙和一把锁.把钥匙插进锁孔里转一下,锁就开了.怎么开的?那可是个谜.如果把锁的结构图钉在锁旁的墙上,或者锁是玻璃做的,那就很容易把锁撬开,或复制一把钥匙.锁可以一直保守秘密,因为它的机械结构是藏在里面的. [12]



锁里有几根短针，每根短针都有一个小缺口．当相配的钥匙插入时，这些缺口就排成一条直线，锁柱一转动，锁簧就移开．不相配的钥匙不能让短针排成一条直线．

现在把锁拆开来，摆在你面前，很容易弄清楚它的机械结构，零件也容易连接．更进一步，搞清楚了一把锁的工作原理，也就容易搞懂其他锁的机械，至少类型相似的锁．

（说两把锁同一类型是什么意思？这本身就是一个问题！）

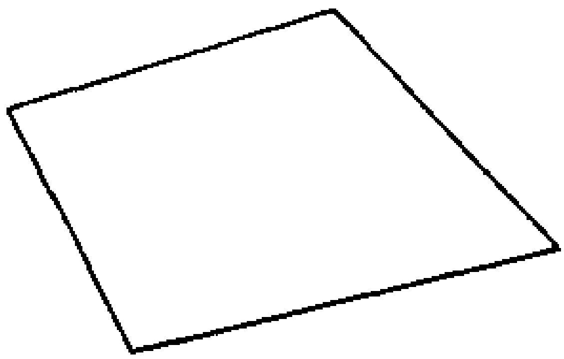


弹琴的人摁一下琴键，另一头就像跷跷板那样抬高．琴锤杆的一头被压住，迫使琴锤向上去敲击琴弦．

钢琴的这个巧妙结构可使弹琴的人连续快速敲击许多琴键,重或轻,休止或启奏.机械结构中的杠杆并不是钢琴特有的,到处可以找到它,包括上面说过的锁.

[13]

几何问题习惯上都要求解题的人作连接线,这些连接线通常是隐蔽的、看不清的,没有什么定律或规则告诉解题的人该做什么.这个几何问题要求解题的人作连接线,从字面上说,就是画上一些未画的线段;从比喻方面说,就是看出一种关系.

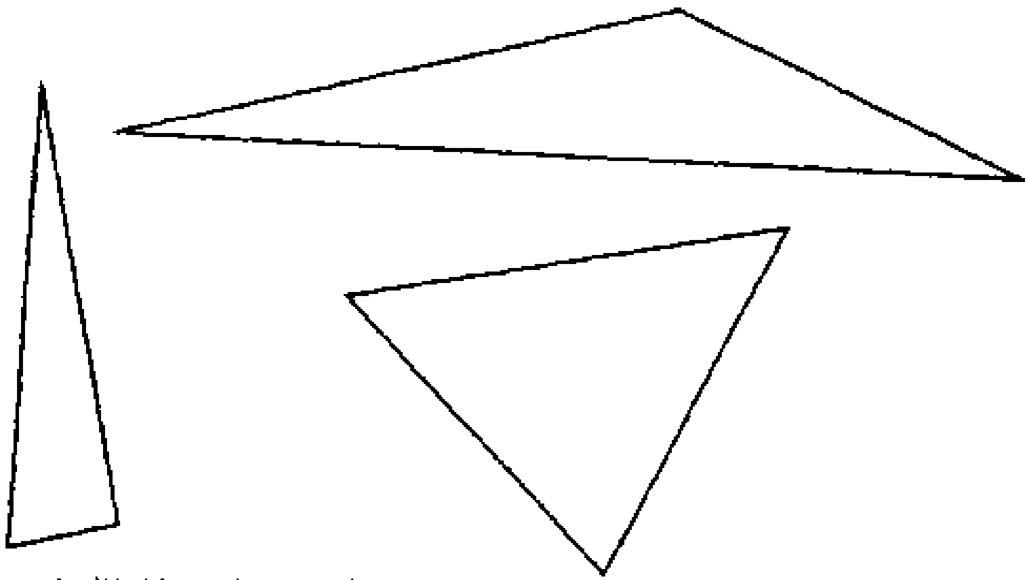


这个图的目的是表示一个一般的四边形,即任意四边形.问题是说明为什么这个四边形的四个内角加起来,和是360°.任何怀疑的读者可以用手边的量角器检验这个结论.取最接近的度数,这些角是81°,115°,62°和102°,它们的和是360°.

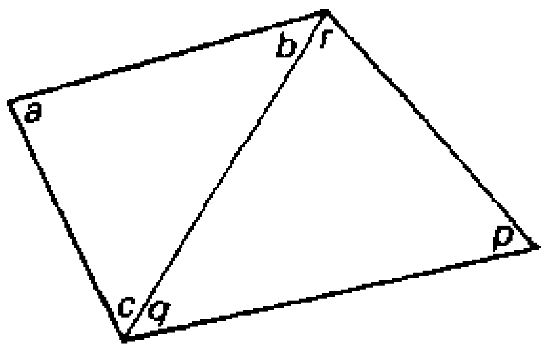
用几个四边形做实验都会证实它们的内角和无疑地是360°,即使多出或少掉1度的一小部分,没有一个称职的数学家会轻易地怀疑这点差异可归之于"实验误差".问题是"为什么"?

因为所有的论证和结论都需要前提,我们就取一个线索作为出发点,这个线索是任意三角形的三个内角和等于180°.

"线索"这个词是合适的.它来源于一团线.希腊英雄提修斯冒险闯入米诺斯王的迷宫,找到半人半牛的怪物并杀了它,然后又逃了出来.为什么他能逃出来呢?因为他闯入迷宫时,一路放开一团线,又顺着这条线逃了出来.

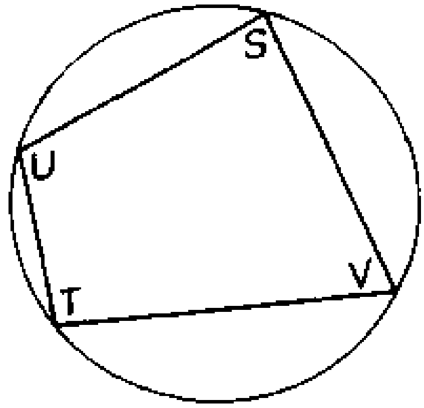


[14]　怎样利用关于三角形内角和的线索呢？



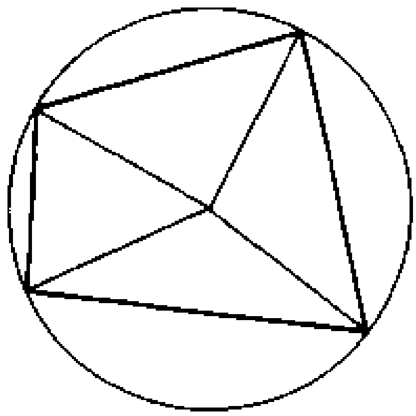
原先的四边形可以看作两个三角形，它们的六个角分别是 a,b,c 和 p,q,r，虽然原四边形有两个角，每个被切成两部分，但这六个角一起构成原四边形的四个角 $a,b+r,p$ 与 $c+q$．一点也不奇怪，如果一个三角形的内角和是 $180°$，那么，两个三角形的内角和是 $180°$ 的 2 倍．

把一个四边形分成两个三角形的思想可以作为杠杆去发现四边形的更多性质．下图是一个相当特殊的四边形，特殊在于它内接于圆．由于这增加的特点，也就有增加的性质．当然它的内角和仍是 $360°$，与实际测量所得结果相当接近．但现在下面的结论也是真实的：每对对角的和是 $180°$，$S+T=180°$，及 $U+V=180°$．



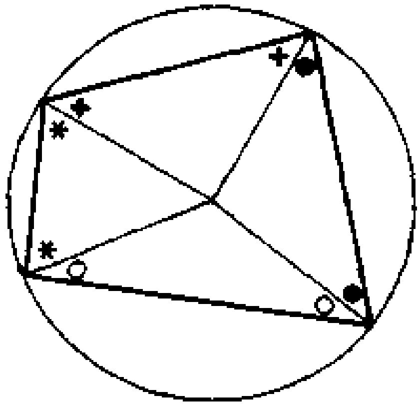
这是为什么？原因必定与圆有关，因为原先的四边形不内接于圆，就没有这个性质．圆造成什么不同呢？圆的特殊性在哪里？或者说，四个顶点在圆上的四边形有什么特殊性呢？

一个圆是一个动点的轨迹，这个动点始终与一定点（即圆心）保持同样距离．这增加的线索只能用于标出圆心，并画出连接圆心与四边形四个顶点的、长度相等的线段．这时图形立刻现出不同的样子．同前，原四边形被分成三角形，但这次是四个而不是两个三角形．

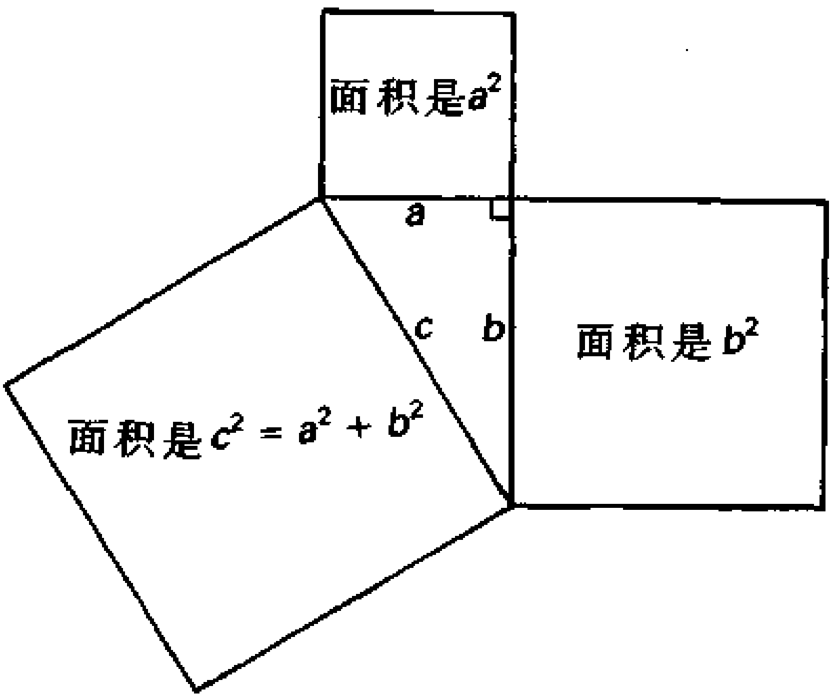


[15]

由此我们该往哪里想？下一步怎么做？我们必须以某种方式利用圆半径，即圆心到四边形顶点的线段，它们是相等的．当然！这些三角形称为等腰三角形，因为它们有一对长度相等的边．因此，它们也有一对相等的角，在图中标以相同的符号．



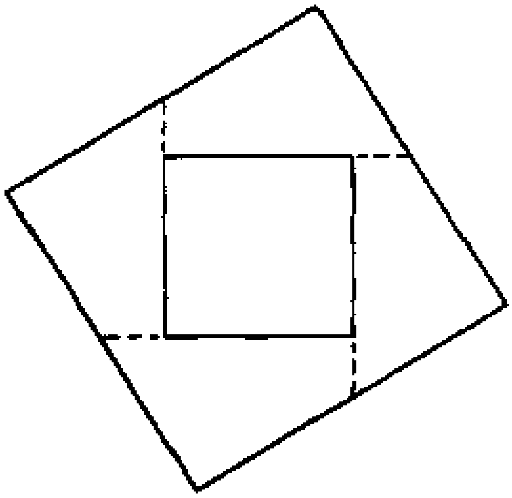
圆已经被充分利用,现在可以把它放到一旁去.仔细看四边形,我们看到标有 S 和 T 的一对角由一组符号不同的四个角组成.类似地,U 和 V 这对角也由这样的四个角组成,只是次序不同.于是 $S+T=U+V$ 就不足为奇了.



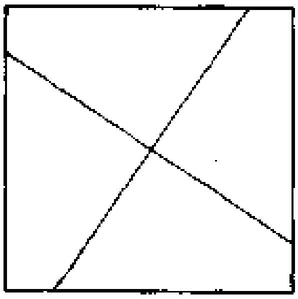
四边形的这些性质相对地比较容易"看到",其他性质就比较难捉摸了.毕达哥拉斯定理说如果在直角三角形的边上作正方形,那么最大的正方形(它作在"弦"上)的面积等于另两条边上的正方形的面积之和.这个享誉 2000 多年的卓越定理,已发

表的证明有 200 多个，包括美国总统加费尔德①的一个证明.

我们怎样证明它？一个简单合理的想法是把两个小的正方形切成几块，这些小块拼起来恰好做成大正方形. 任何数学家自然会首先想到对称地切. 例如，把小正方形放在大正方形的中心 [16] 位置上，再把它的周围切成小块拼成中等的正方形.



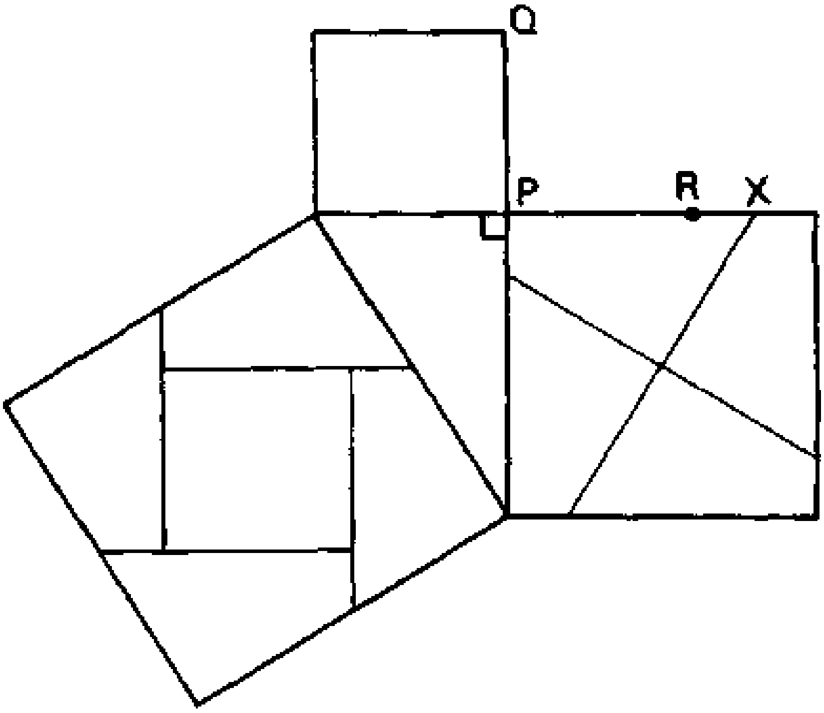
想象小正方形歪放在大正方形中，沿着虚线切开. 看来这是个合理的想法，因为容易把中等的正方形切成几块大致合适的形状如下：



有可能准确地获得合适的形状吗？可能的，只要在边上取 R，使 PR 的长等于线段 PQ 的长，再从点 R 与顶点之间的中点

① James Abram Garfield(1831—1881)，美国第 20 任总统.——译者注

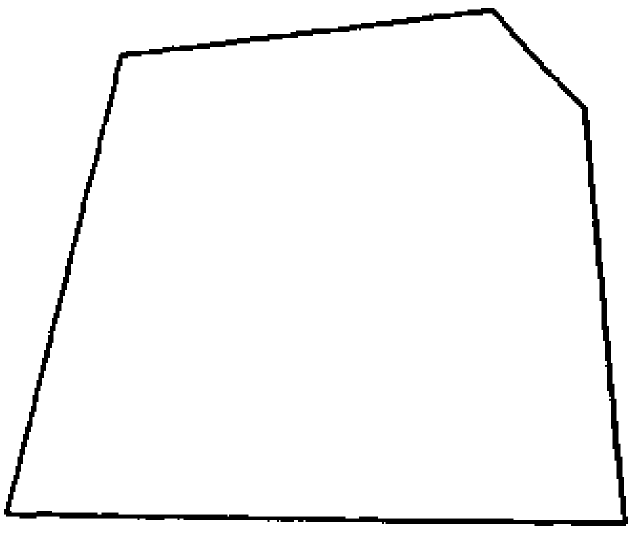
X 开始切.



现在五小块面积与"弦上的正方形"完全相等.为什么在 X 切总能成功呢?这确实是这个解的一个漏洞,将在适当的时候[17]补上.

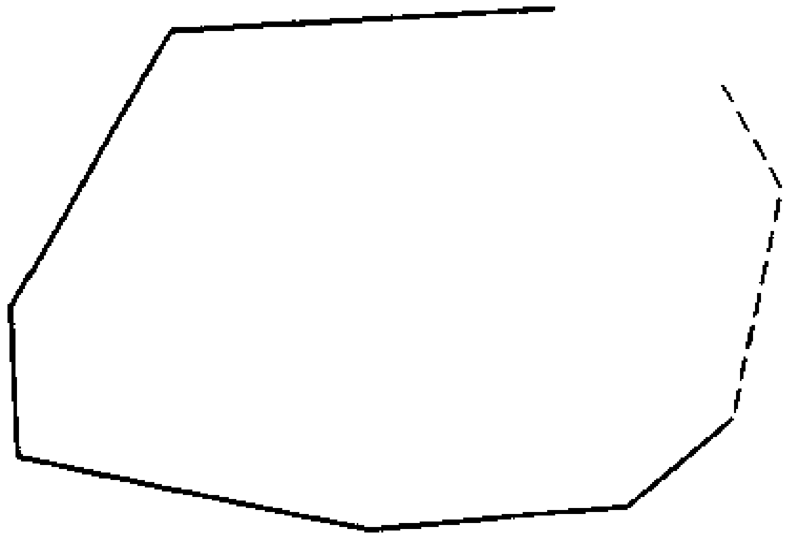
问题

1.



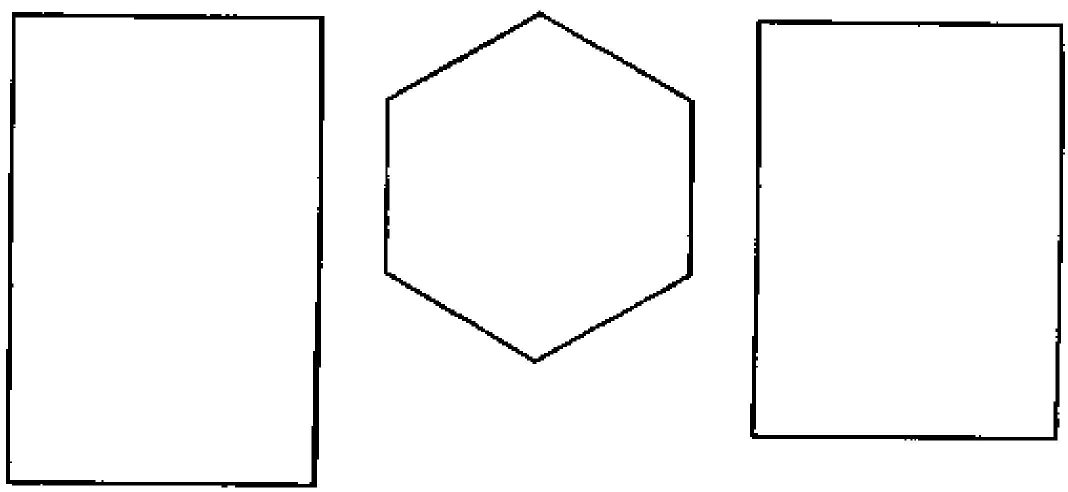
像这样的任意凸五边形,内角和是多少?

2.



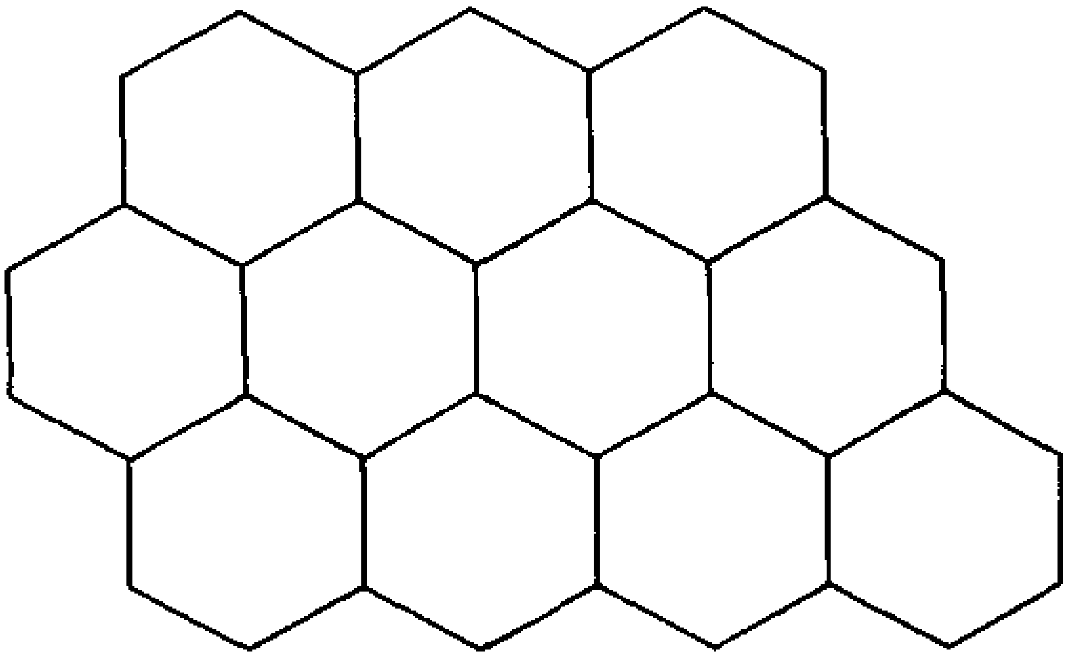
什么是凸 n 边形内角和的计算公式？

3.



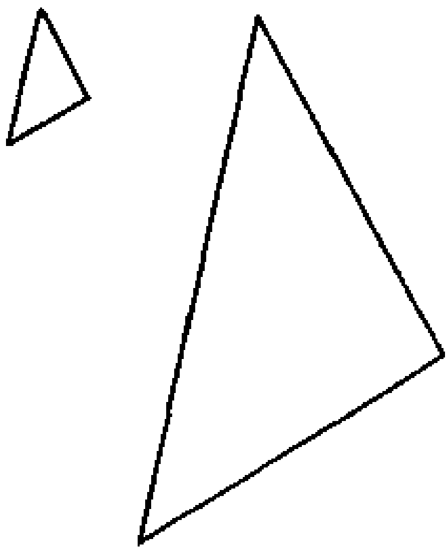
在从充分远来的光线照射下，这些影子中，哪一个可以作为立方体的影子？ [18]

4.



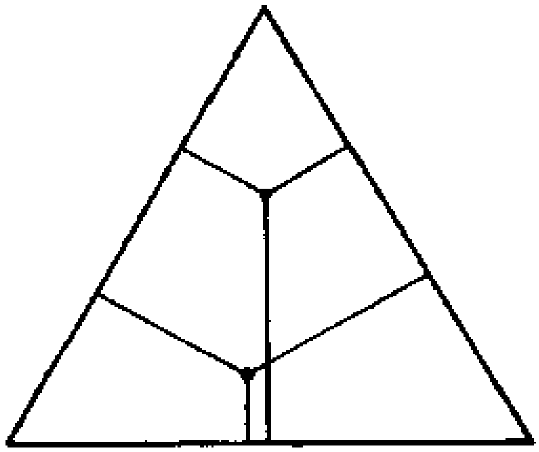
这个六边形的拼花图案中,立方体的堆垛在哪里?

5.



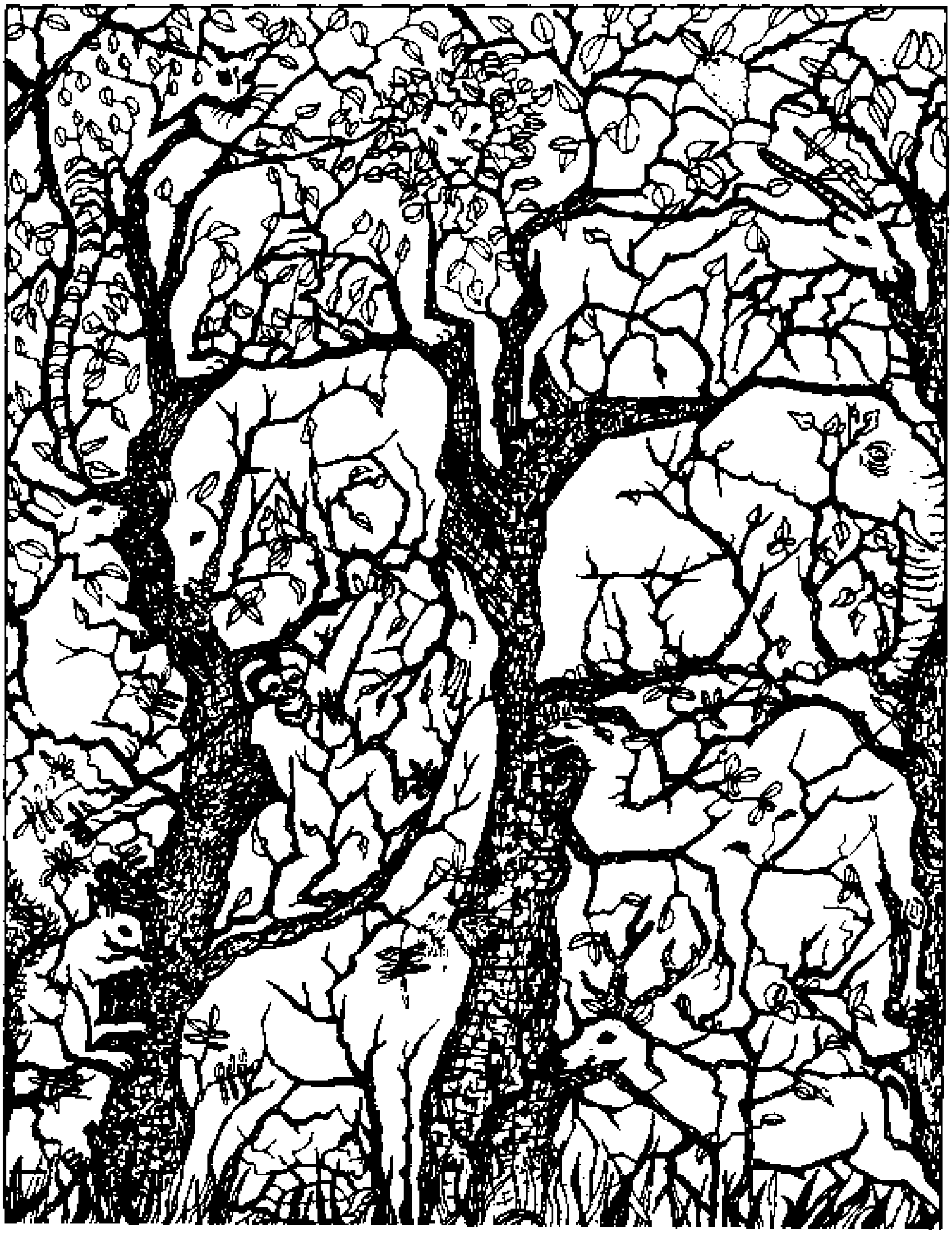
这两个三角形是相似的,在每个方向上的长度,大的都是小的4倍,大三角形里可以装几个这样的小三角形?

6.

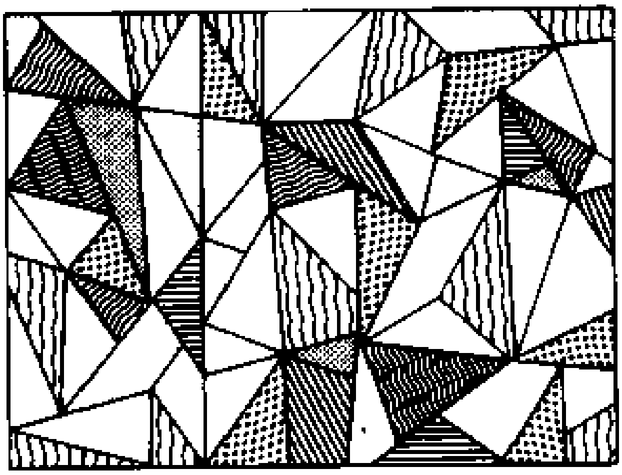


在这个等边三角形里，标出一个点，由这个点向三角形的三条边引三条垂线，正如实验所证实，这三条垂线的总长不依赖初始点的选择. 为什么? [19]

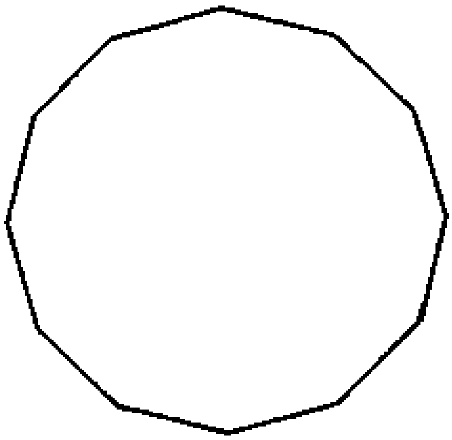
第2章 隐藏的图



左图里藏着哪些动物？为什么这样难找到它们？如果不能说出它们在哪里，能把它们都点出来吗？为什么在用你的眼睛看和用你的脑子看之间有这么大的差别？ [20]

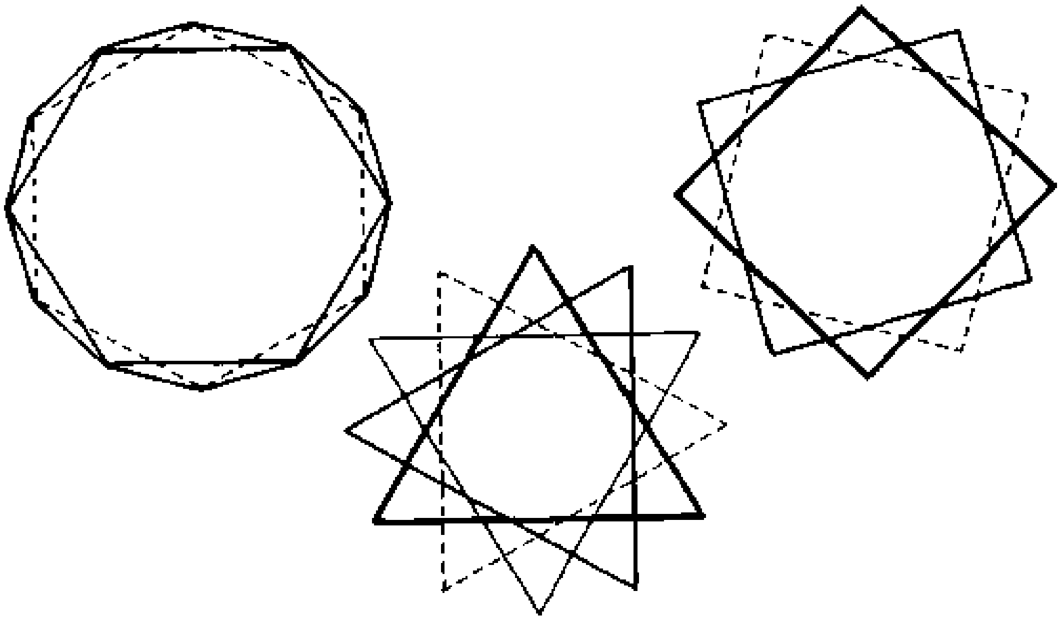


在这参差不齐的设计中，五角星在哪里？它靠近图的左下角．虽然它只是这图的“正常的”一小块，却很少有人能立刻把它认出来．

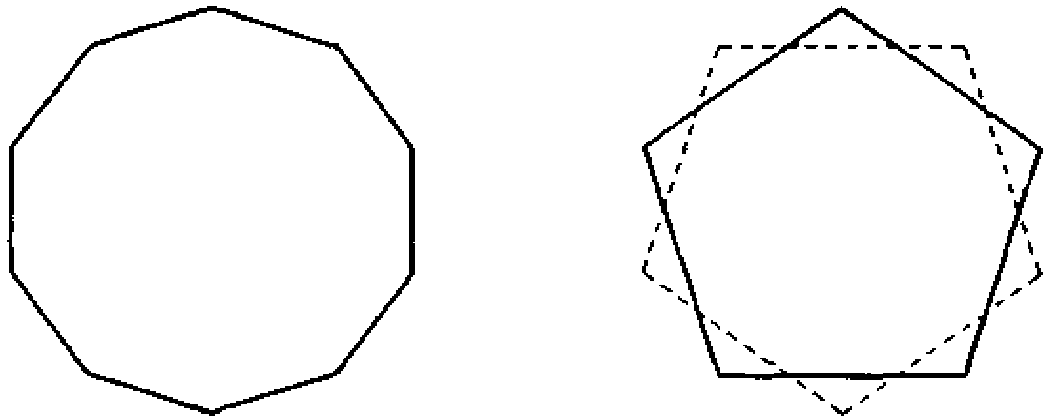


这个设计没有花样．与前一图形成对比，这对称而且漂亮的图是个十二边形，一个规则的十二边形，也称为正十二边形．

这个图，可以说，含有两个正六边形，三个正方形和四个等边三角形．在哪里？

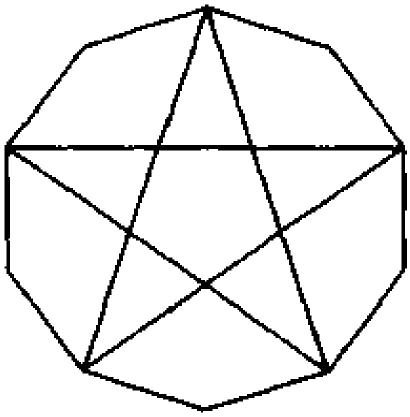


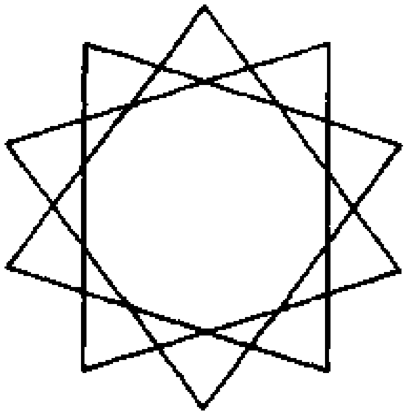
这些可以在正十二边形中“看到的”正多边形与 12 的因数[21]（整除 12 的数）之间存在着一种简洁的关系.



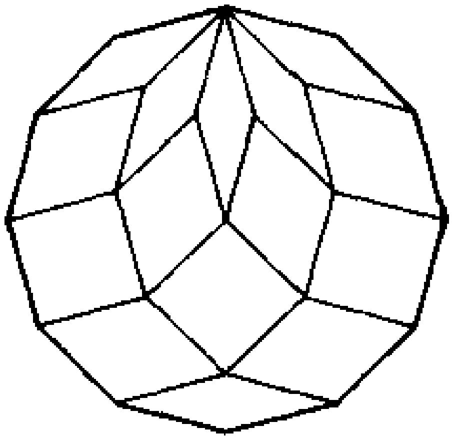
这个图形初看很像十二边形，可一数边只有十条，在这十边形里只能看到一种正多边形；正五边形出现两次.

然而，有两个星形的正多边形. 五角星的画法是从一个顶点开始，向它后面的第四个顶点画一条直线，如此继续画下去直至回到起点. 十角星画法是从顶点向它后面第三个顶点画一条直线，如此继续画下去直至回到起点. 这些星形图形比较难于用眼



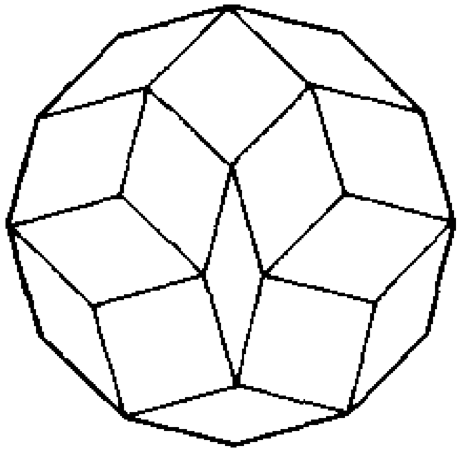


睛看清楚，因为它们自身相交.它们有一点三维的性质.



这个十二边形完全是平面的，并被分成菱形.

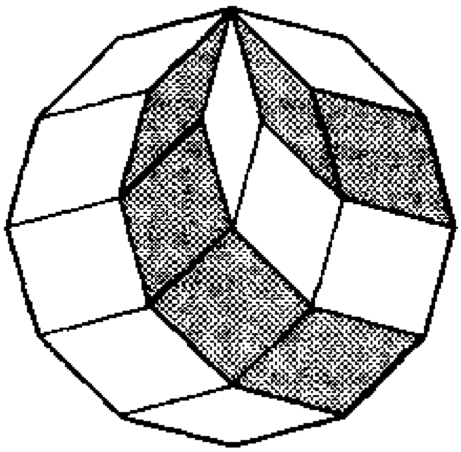
这种菱形块很像孩子们玩的彩色木块，它们被盛在长方盘子里卖，可以做成各种图案.还有其他方法可以用15块菱形填满十二边形，这是其中的一个： [22]



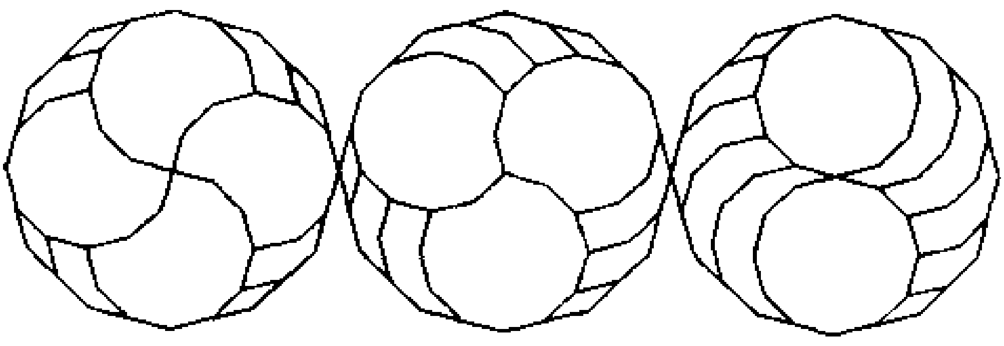
这种分法也可以这样得到:从任意一对相邻的边开始,用菱形将这个十二边形填满.在操作时有多种选择,有的点可以画出不止一个菱形.有一些选择可以完成构图,其他的会引向死路.奇怪的是,每一个完成的构图都包括6个窄长的菱形,6个较宽的菱形,及3个正方形.其他的组合是不可能的.

通过计算或测量,显然,各种尺寸的菱形之间存在一种简单关系.最窄的菱形,角的度数是30—150—30—150.中间尺寸的是60—120—60—120.当然,正方形的是90—90—90—90.

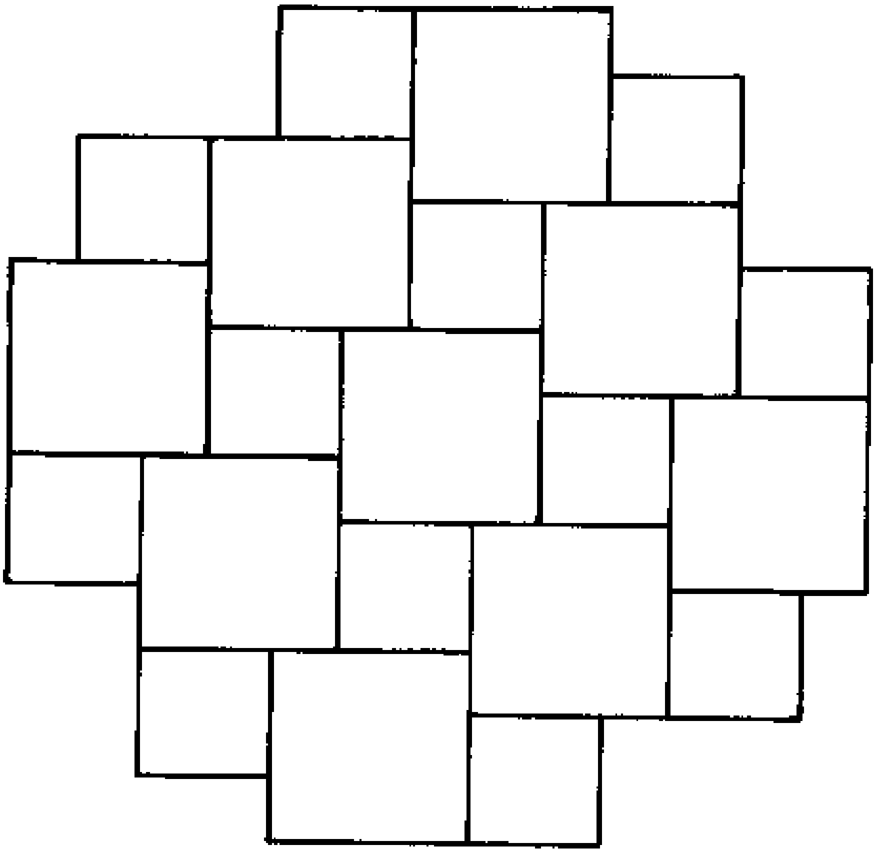
这简单性强烈地暗示数学家,关于这种分法存在某种"自然"的东西,并且毫不奇怪,可以用它把十二边形优雅地分成其他形状.

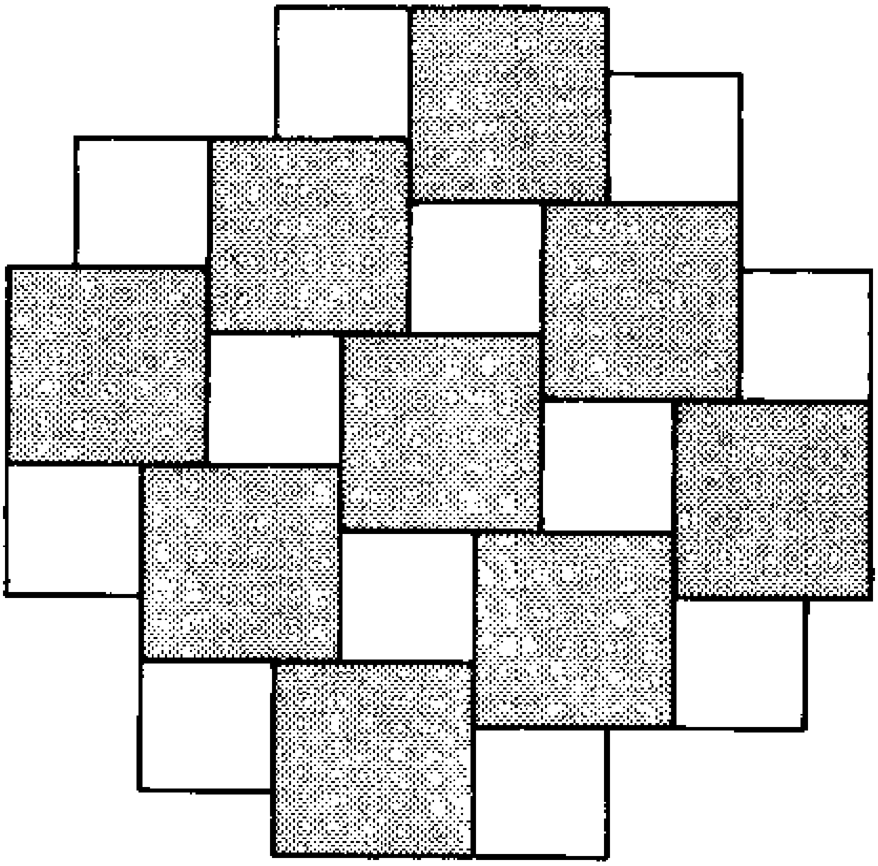


特别地,如果把菱形想象成纸条,如图所示,那么,可以用几种方法把4个十二边形剪贴起来做成一个大十二边形,如这些优美的图案所示.



[23]





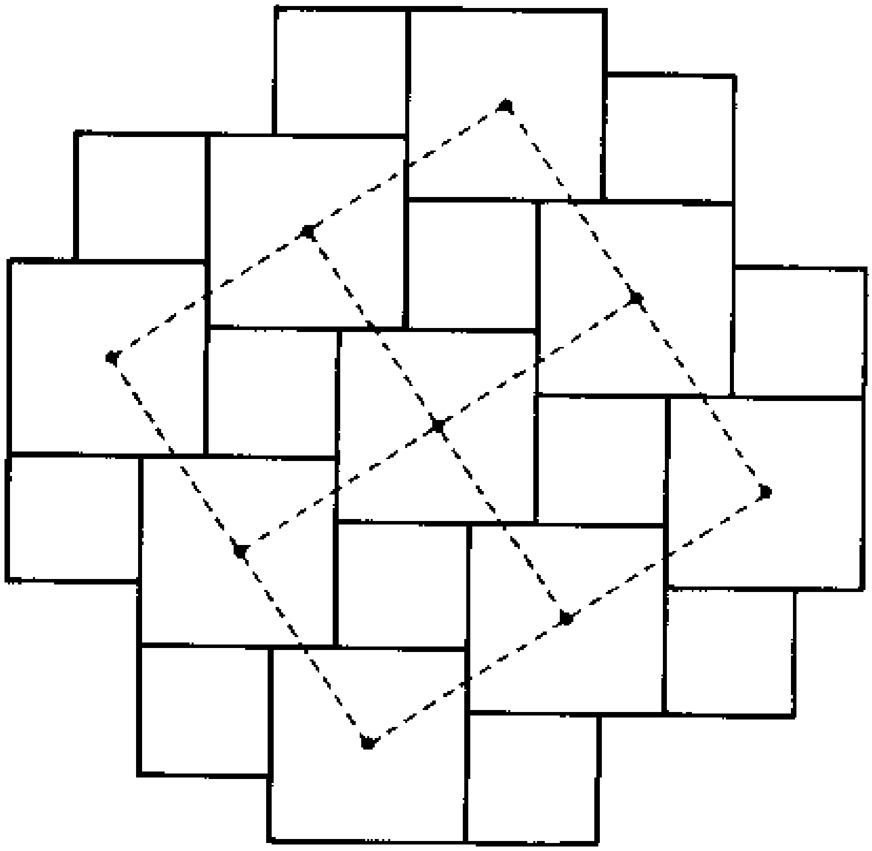
上页中的这种地砖铺法是众所周知的.正方形有两种不同的尺寸,乍一看,是用两种不同单位,即两种不同尺寸的正方形铺成.是不是有一种方法,把这个图看成仅用一种尺寸的相同的正方形铺成的?

请集中注意大正方形.它们好像是以整齐的步伐沿着斜线穿过地板.看它们依一个方向陡峭地向下走到右角.再看它们比较平稳地向上走到右上方.

如果把大正方形涂上阴影,或者把小正方形想象成透明的,这个图案给人的印象更加鲜明.

[24]

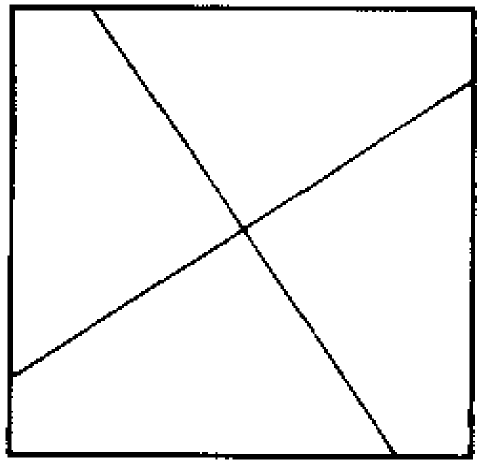
为了突出这个图案,我们也可以在每个大正方形里选出"相同"的点,并集中注意这些对应点.



这里,每个大正方形的中心已经选好,它们连在一起,随着正方形往前走.结果是一个由更大的正方形组成的图案,边与边

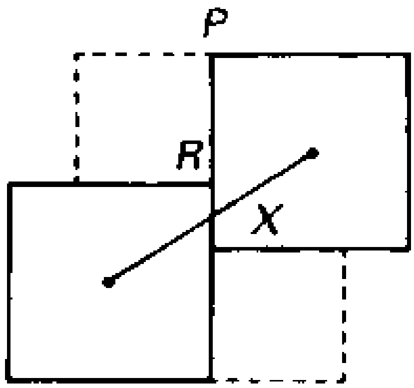
以通常方式连接.

现在我们可以把这个图案想成由这些很大的正方形重复而成,画在每个特大的正方形上的构造相同,即一个小正方形和四个完全相同的属于中等大小的正方形的小块组成.并且,这些属于中等大小的正方形的小块正好拼成一个正方形,如下图所示.



然而,这个图或许是没有必要的,因为完全相同的图已经在第一章出现过.在那里它是证明毕达哥拉斯定理的工具.现在的铺法解释了在中等大小的正方形中,恰好在什么地方切,为什么总能成功,填补了那个证明的漏洞.

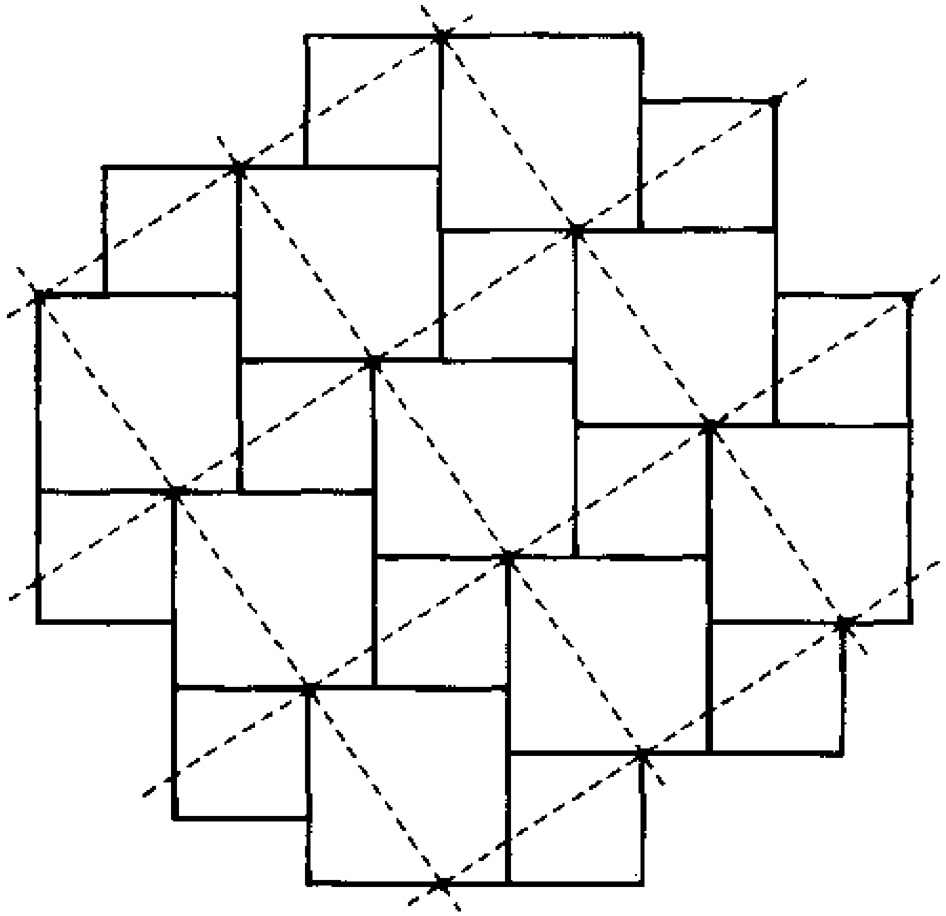
[25]



在连接两个大正方形的中心时,连线自然会对称地通过它们的边的公共部分,并将它在 X 处平分.由于两个角都正好被

较小的正方形填上，*PR* 的长度就等于较小正方形的边长.

连接大正方形中心是很自然的，而且自然地产生一个对称图案.如果选择另一组对应点，会发生什么事情呢？



取每个大正方形左上方的顶点，连接这些点，特大的正方形图案又出现了，但看上去向上并向右移了.

这个分法怎么样呢？特大正方形的各部分还能拼成那两种较小的正方形吗？是的，由于小正方形现在被分成两块，而大正方形则被分成三块，所以，更大的正方形就由五块组成.

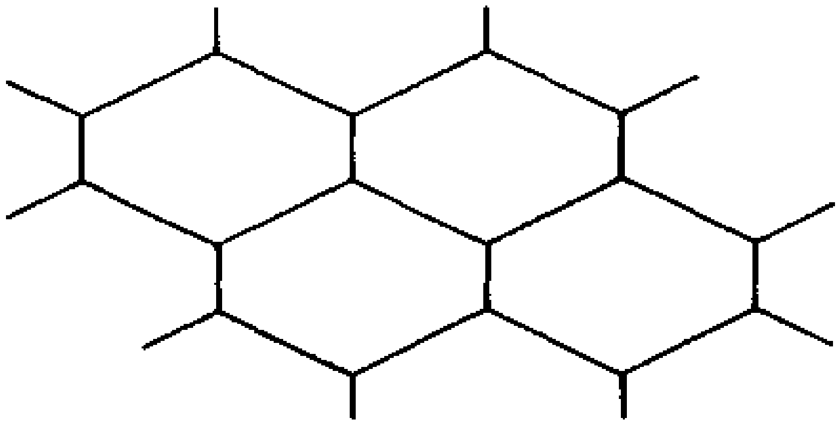
事实是选择哪一组对应点根本没有什么差别.都会出现相同的特大正方形的图案，而且每个特大正方形至多可以分成九块，它们将组成其他两种正方形.

所以仅用这种方法就有无穷多种“不同”的毕达哥拉斯定理

的证明!　　〔26〕

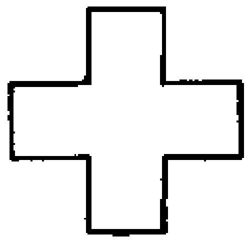
问题

1.



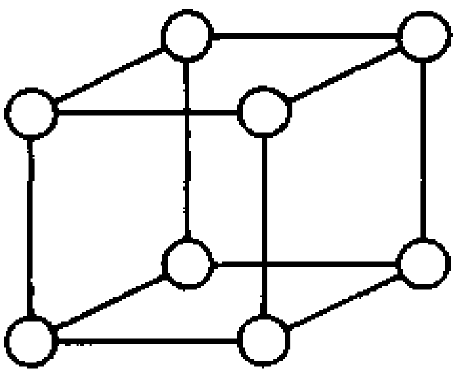
通过把如图的一个由拉长的六边形组成的图案,放在另一个完全相同的图案上,做出由相同的五边形组成的图案.

2.



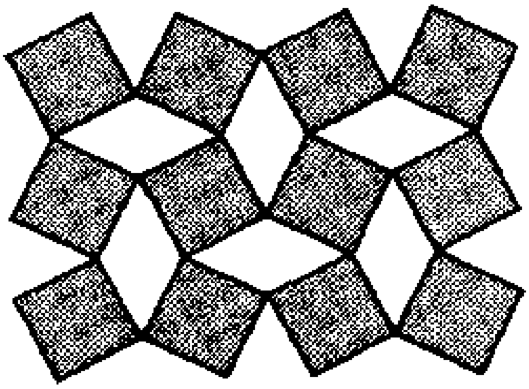
怎样把这个希腊十字分成几块,再拼在一起形成一个正方形?

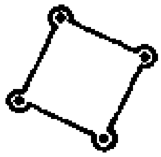
3.



用两种颜色给正方体的八个顶点染色,每种颜色用四次,使得各个面的染色都一样.

4.



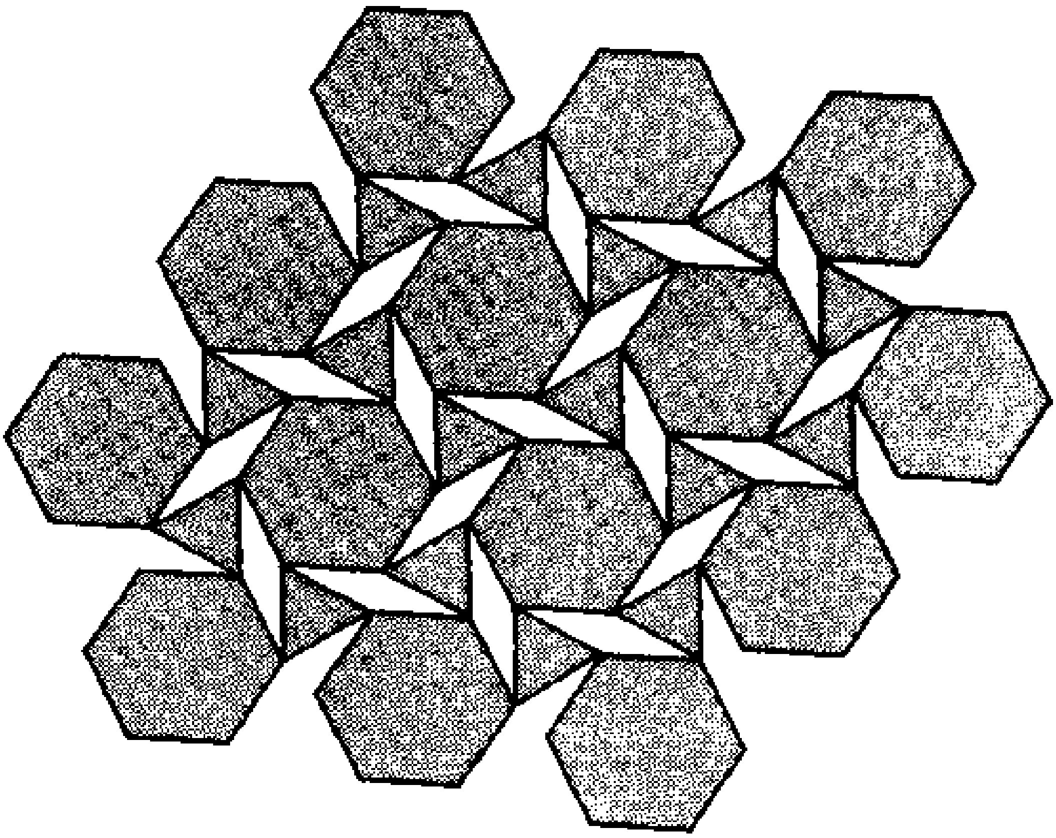


想象在这平行四边形和正方形的图案里，正方形是实在的，角用铰链连接着，平行四边形是空的。用铰链连接的正方形能动吗？它们的极端位置是什么？

（如果用你的手指去转动方纸片显得太难的话，可在剪的时候留一个"小耳朵"，如右图所示，并在重叠的顶点处用大头针上下钉在一起。）

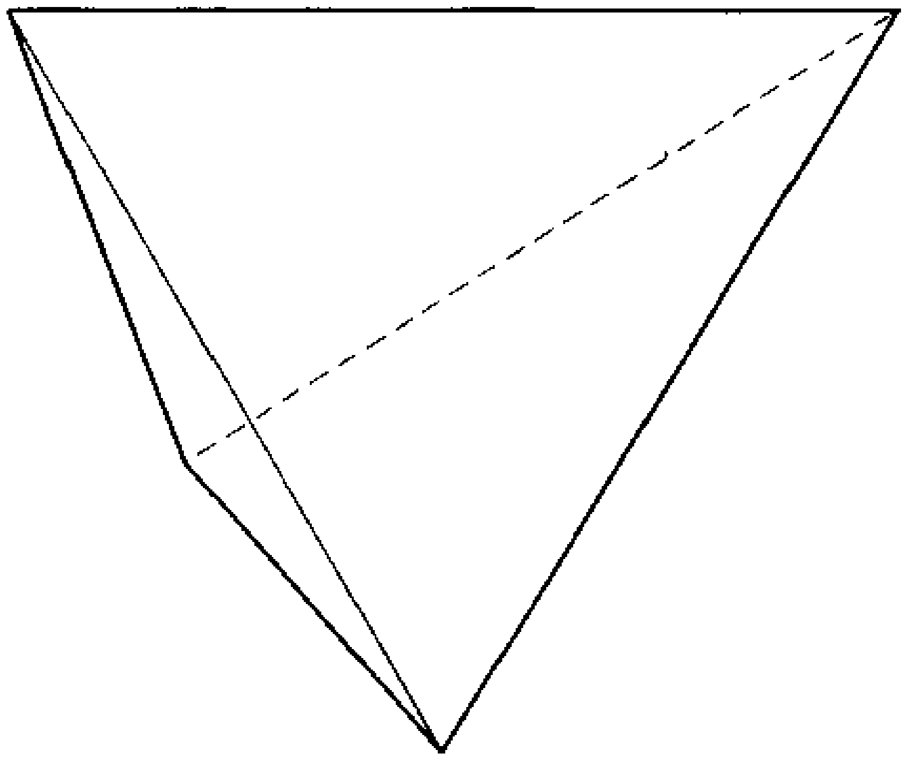
[27]

5.



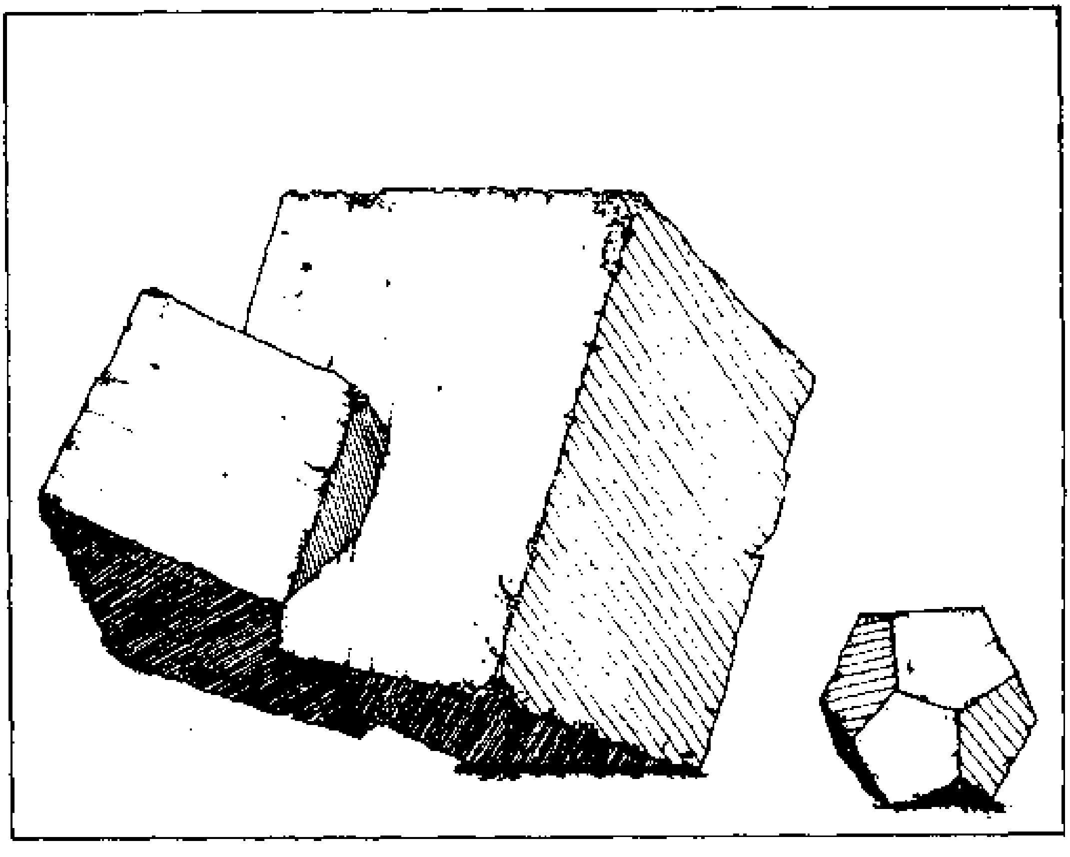
能把六边形和三角形的图案像问题 4 那样装上铰链吗？

6.



不去连接十二边形的一些顶点构成正方形，而是连接一个立方体的一些顶点构成一个四面体，一个有四个三角形的面的正多面体. [28]

第3章 晶 体



经过亿万年的形成过程，矿物晶体显示出自然界中数学的美和对称.在爬行动物和鸟生出它们的光滑的卵形的蛋之前，甚至在原始植物的叶子里显出简单的对称性，或海洋里原始生物创造出对称的外壳和躯干之前的漫长岁月，矿物晶体已经在地球深处形成了.

具有讽刺意味的是，据我们所知，只有新近进入动物王国的

人类才有能力去钦佩和欣赏它们的美.无怪乎早期的科学家断定矿物晶体在地球内部生长过程就像他们假定活的生物体自发地在泥土里繁殖一样.否则从明显死去的东西里怎么能突然出现苍蝇和虫子呢?要不是按照某种生命法则成长,晶体怎么能获得它们的对称性呢?

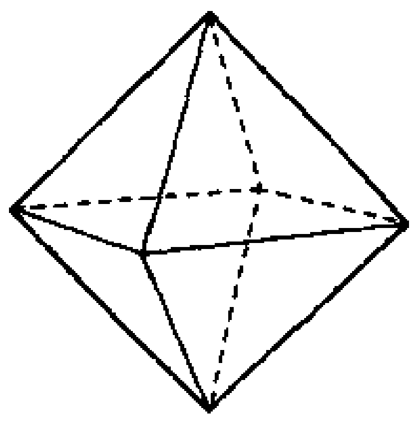
我们没有理由笑话他们.晶体还被说成是在溶液里"生长"的.我们的优势是或多或少地知道晶体怎样生长,怎样获得规则性的,尽管它们决不是活的.

左图中的两块晶体是黄铁矿,或铁的硫化物 FeS_2.左边的第一块晶体是一对互相贯穿的立方体.如果你能找到这种藏在地球里的立方体,那就不必发明立方体了!

[29]

矿物学家把第二个晶体说成是一个五角十二面体.数学家简单地称它为十二面体,但后面将会看到这是一种含混的说法.

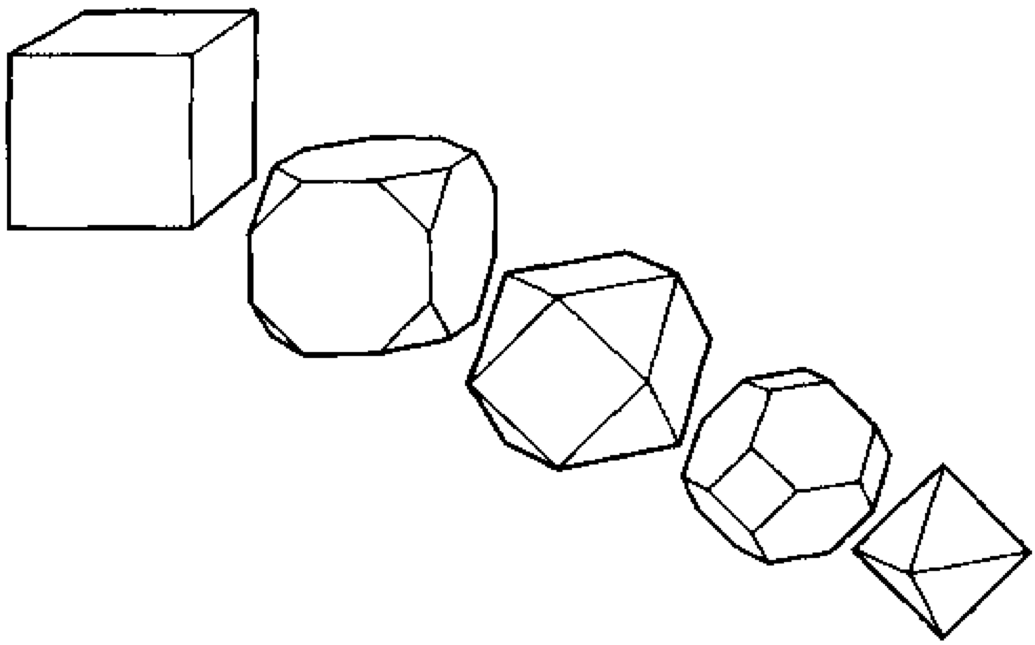
这样的黄铁矿晶体在意大利还可以找到,古希腊人曾在那里建立过殖民地.古希腊哲学家完全可能在那里看见过这些晶体,因而"发现"具有完美的五边形面的完美的十二面体.凯尔特人也已知道十二面体.有两打以上的来自凯尔特的十二面体被保存着.十二面体,八面体,立方体和四面体是四种为柏拉图所知道的规则的立体.有20个三角形的面的二十面体是后来发现的.



所有晶体分属几个种类或体系.不足为奇,立方体属于立方体体系.然而,具有如上形状的八面晶体也属于立方体体系.

怎么会呢?八面体的“立方性”表现在什么地方?在真实的矿物晶体中,这也是自然地被发现的.

方铅矿是铅的硫化物.与黄铁矿一样,它的晶体常常是立方体.然而,典型的方铅矿晶体往往不是完整的立方体.偶然地,它会缺几个角.或许缺得少些,或许缺得多些.实际上,某些角会比其他角缺得多些,但是我们可以修改缺角,在数学上产生这个理想的方铅矿晶体系列.



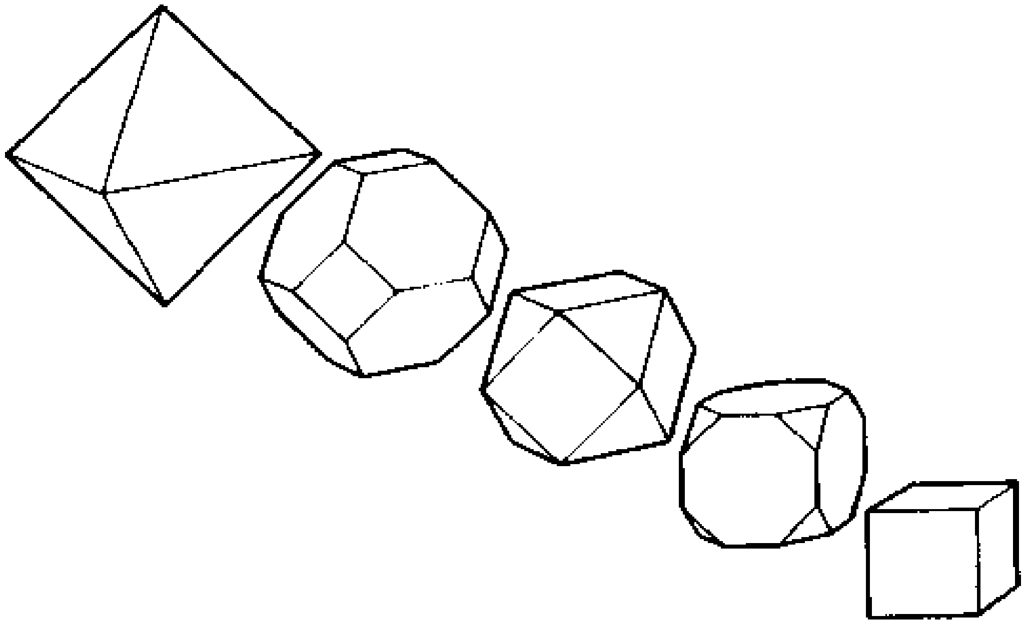
[30]

第一个晶体是立方体.第二个“显然”是切掉角的立方体,不是吗?

第三个晶体被切去相当多,因而它的“立方体特性”明显减少,像两个城镇之间的旅馆似的,它是被称为立方八面体的正则立体.第四个晶体由于移去了它的角,看上去更像八面体.第五个晶体是一个完美的八面体.

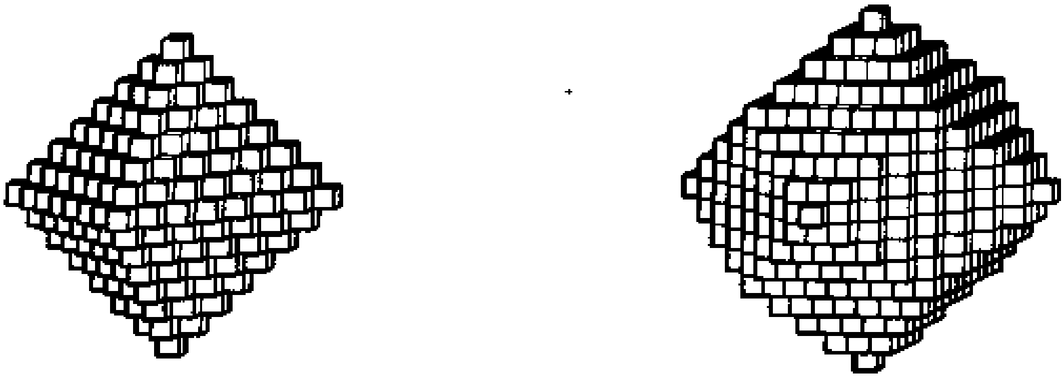
变换的过程是平稳的,精巧的,并且可以说是对称的.我们

也可以反过来,从八面体开始,切去它的角,最后得到立方体.



什么东西能比这有更多的对称性呢?但,如果是这样,为什么不把它叫做八面体体系呢?

晶体的外形只表明矿物分子是怎样结合成一个规则结构的."结晶学之父"哈依(Hauy,1743—1826)解释过小的立方体的规则结构怎样生成各种外形.



这个八面体有阶梯形的表面,"从理论"上说,这种表面应该是粗糙的,但实际的表面与构成它们的小块相比是难以想象的

[31] 大,所以表面显得十分光滑.

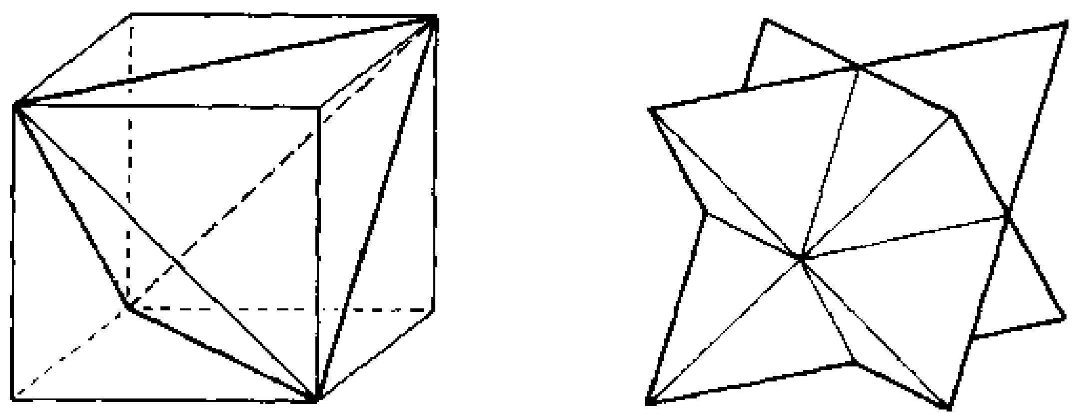
在超微观水平上,还有别的方法堆积立方体.例如,如第二个图所示在初始的立方体的每个面上可以建造一个棱锥.

结果是一个实实在在的十二面体,矿物学家常常这样称呼它,因为它有十二个面.十二面体的词头"dodeca"在希腊语中的意思就是十二.十二条原立方体的棱每一条都被菱形的面取代.

数学家,有时还有矿物学家,把它叫作菱形十二面体以区别于正五边形的十二面体.它的表面本身没有达到它应该达到的规则性.一个规则的四条边的多边形应该是正方形,而不是菱形.

立方体体系的晶体并不限于这些形状.事实上,立方体形状的晶体不少于15种,其中包括四面体,即正三棱锥.

正四面体?在正四面体里有一些正方性吗?在很多方面!

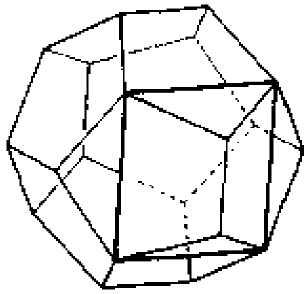


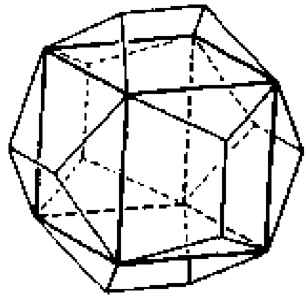
把立方体相间的顶点都连接起来,形成一个四面体.第一次留下来的顶点形成第二个四面体.

现在可以毫不奇怪地说,正十二面体也和立方体有关.这种关系不那么明显,也就是说这种关系更为优美.

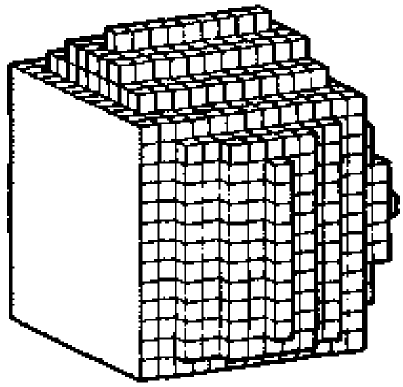
细细地察看一个实际的十二面体就会发现图中标出的四个顶点组成一个正方形.把正十二面体放在手里转着看,我们就能

[32] 发现立方体的六个面.





在一个十二面体中,相应于这种方式的立方体有多少个?仔细看看,很明显,立方体的每条棱是五边形面的一条对角线.但每个面有五条对角线,这就提示我们,最多有五个不重复的立方体,事实确实如此.



机灵的哈伊还能用在基础立方体上作棱锥的方法构造十二面体.然而,对这个十二面体而言,棱锥是巧妙地、不对称地隆起到一条线上,而不是到一个点上,就像帐篷的脊一样,正如本页顶部的图所示.一个对称结构多么光滑地变成另一个啊!

问题

1. 由于正四面体是立方体类晶体的一种,应该有可能在正四面体内找到三条对称放置的,互相垂直的轴.它们在哪里?
2. 在正四面体内找出一个八面体.
3. 比较正方体与它的内接四面体的体积.(这可以帮助你知道

棱锥的体积是同底等高的棱柱体积的$\frac{1}{3}$.)

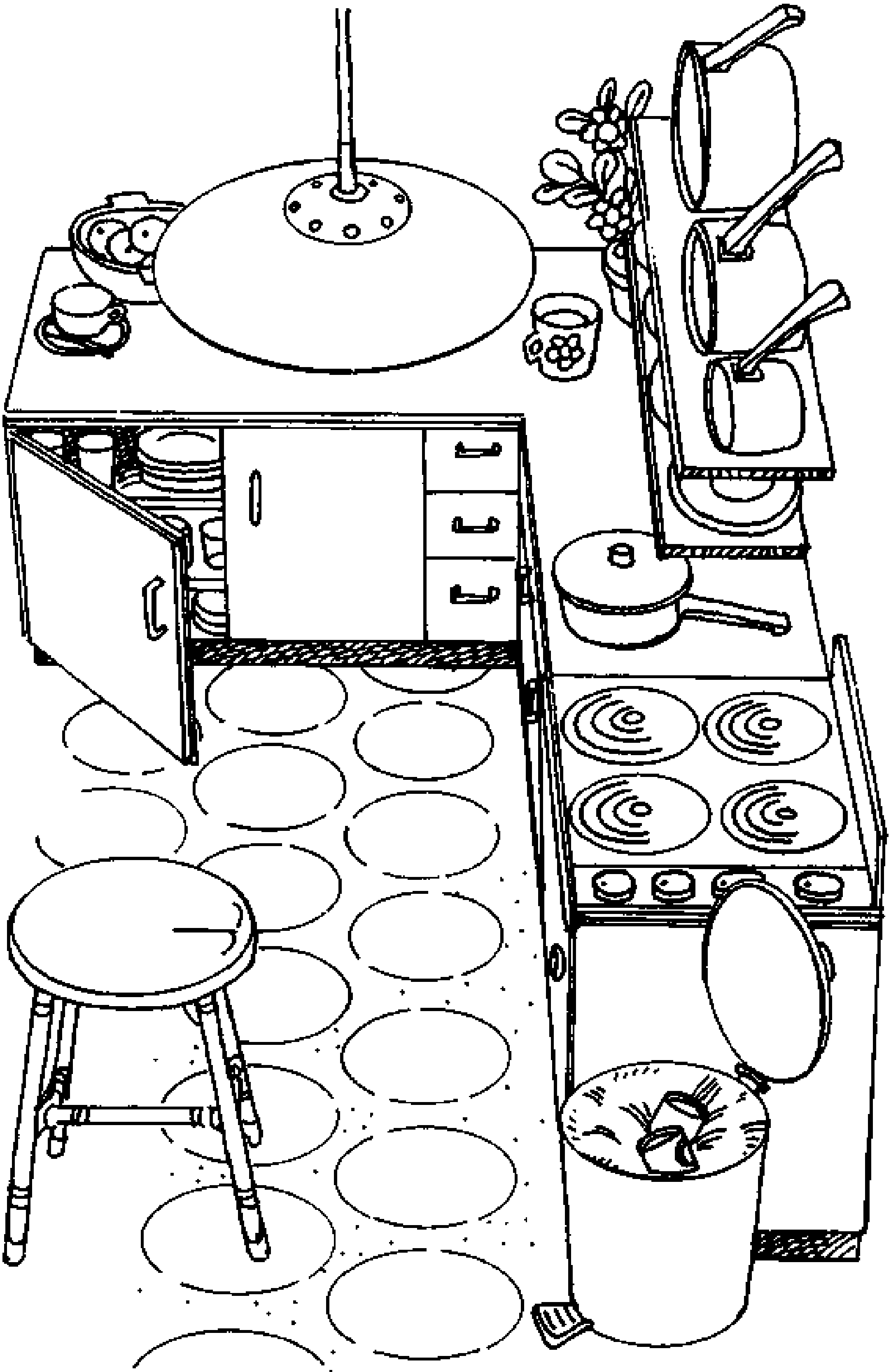
4. 用第2题的结果,比较有相同棱长的正四面体与正八面体的体积.

5. 从一些堆好的立方体开始,在每个立方体内构造一个四面体,使得四面体的任一顶点是八个四面体的一个顶点.

   四面体之间的缝隙是什么形状的?

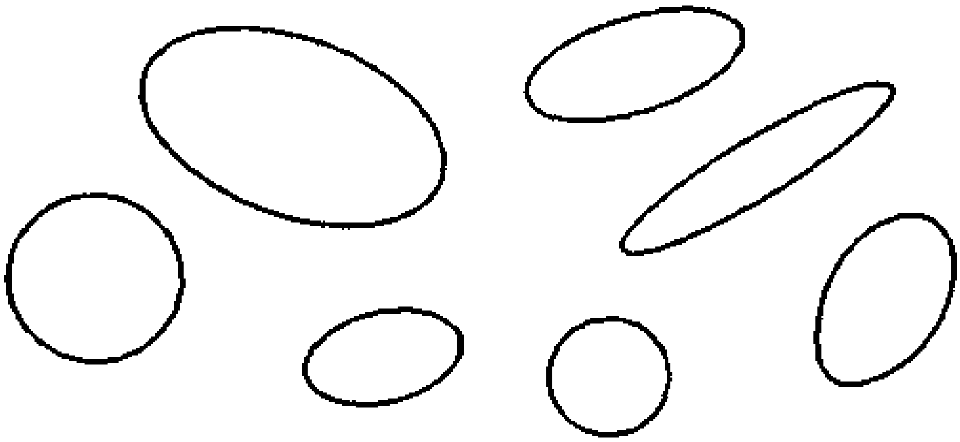
6. 把正四面体和八面体切开,横截面分别是正方形和六边形的方法有多少种?

[33]



[34]

第4章 圆和椭圆



这些卵形中哪一个是圆？哪一些可能是圆(从某个角度去看)？其中只有两个是圆，但只有一个不可能是圆(从某个角度去看)．右下角的卵形“显然”不是的，因为它不是完全对称的．

圆斜着看时，它椭圆化了，呈现出椭圆的模样．我们的眼睛非常习惯于这种圆的变形，在房间里环顾时，我们能把大部分实际看到的椭圆正确地解释成圆，如灯罩的边缘，锅沿，小圆地毯，桌垫，水果盘子……

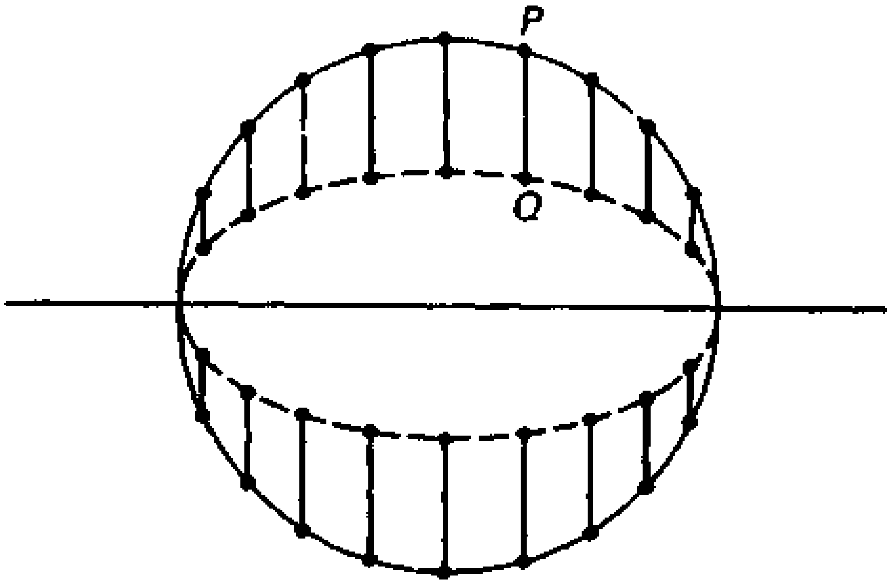
然而，光线被一面圆镜子反射到墙上所得到的卵形是一个真正的椭圆而不是圆．

椭圆是典型的数学对象．椭圆能够以许多不同形式，在初看起来互不相关的地方出现．

最简单的说法，椭圆是压扁了的圆．取一个圆并画一条直径．在圆上取一些点．使这些点向直径靠拢．为简单起见，我们使

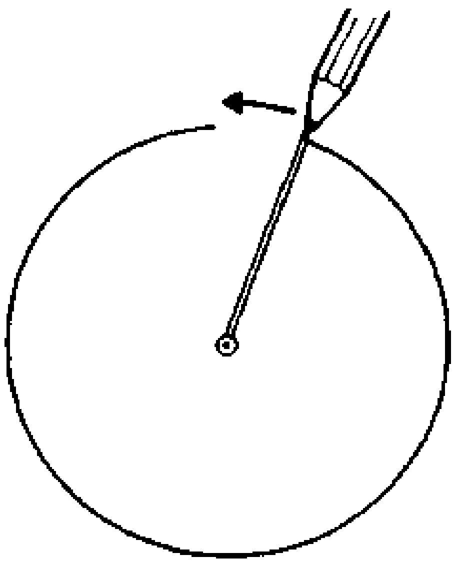
每个点到直径两倍地近①.

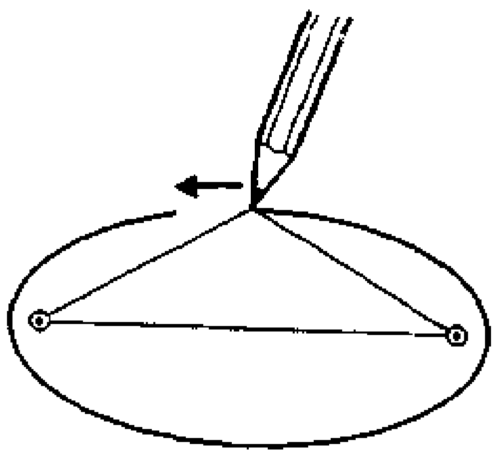
点 P 变成点 Q,等等.现在圆已被压扁,它的高度仅为原先的一半.结果是一个椭圆.



[35]

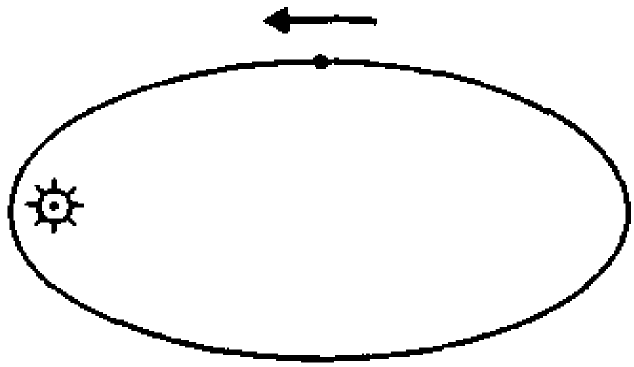
这种画椭圆的方法很容易领会,但画起来却很麻烦.把通常的画圆方法修改一下是个更聪明的办法.



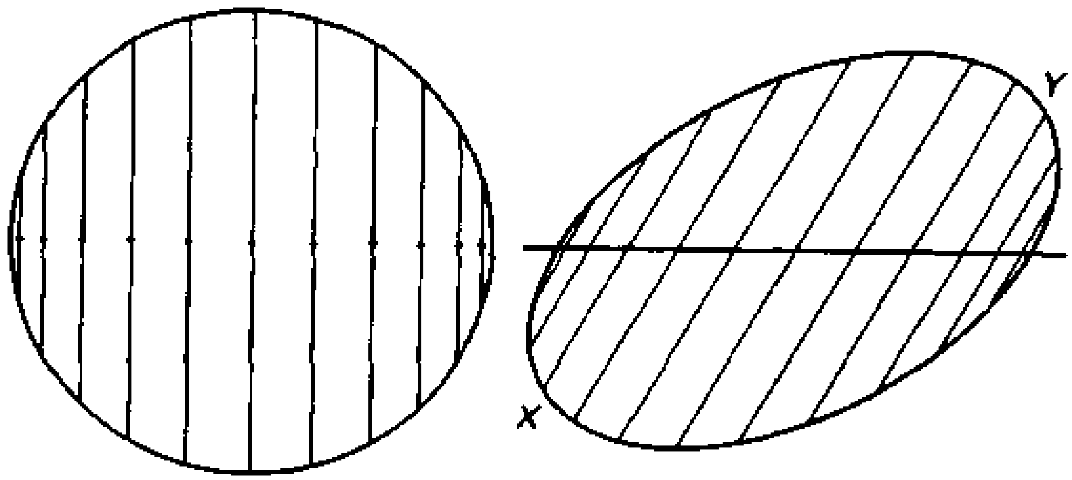


① 意即每个点到直径的距离是原来的$\frac{1}{2}$.——译者注

如果没有圆规，你可以用一根大头针和一根线如图所示画圆．为了画椭圆，把一根大头针换成两根，把它们分开，分得越远，椭圆就越扁．



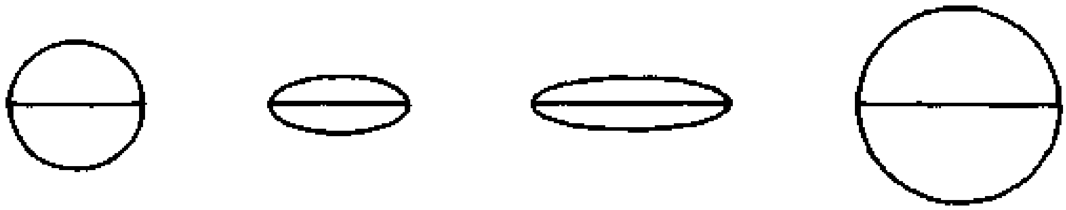
天文学家开普勒（Kepler，1571—1630）第一个提出行星沿椭圆轨道绕着太阳转．这些轨道的确是非常近似于椭圆的，太阳位于一个点上，这个点就是一根大头针的位置．



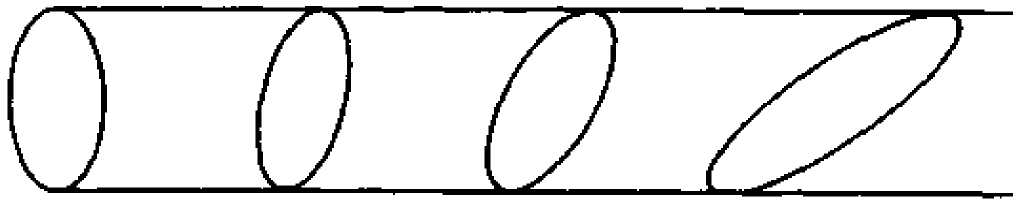
如果一条直径与平行于它的一些线都倾斜下来（如图所示），圆也会失去高度．这圆并不是简单地，至少不是垂直地压缩．这个卵形的最窄点在 X 和 Y．但这个形状还是椭圆！[36]

把圆压扁的相反做法是什么？其中之一是伸长，把圆伸长了也产生椭圆．换句话说，我们可以想象把椭圆伸长得到原来的

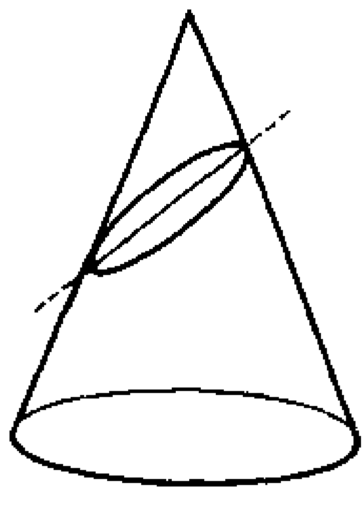
圆.或者把椭圆压缩产生一个圆或另一个椭圆.



把初始的圆的高度压缩到它的一半得到一个椭圆,这个椭圆再伸长50%得到更长的椭圆.为了反过来再得到圆,最后这个椭圆应垂直伸长到3倍.



当圆形截面的圆柱被切开时,截面应沿着圆柱伸展出去.产生的形状是一个椭圆.圆柱的任一截面是圆或椭圆.每个椭圆与初始圆在一个方向上有相同的直径,但与这个方向成直角的直径可以任意长.



这是个圆锥,像圆柱一样,已被切开.切片可以是什么形状呢?

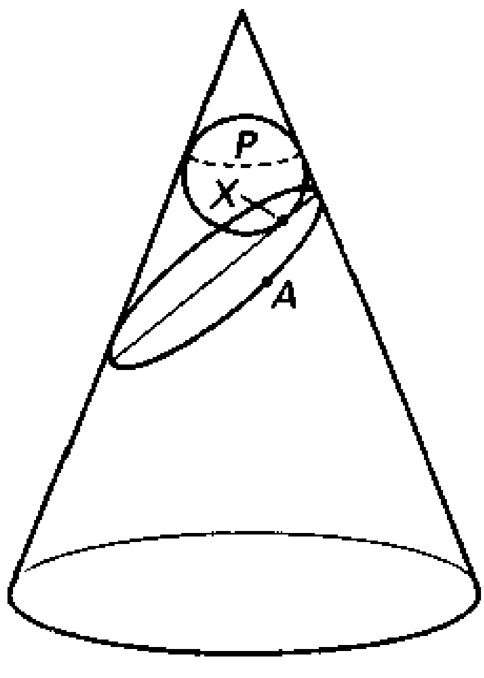
初想一想,可能想到切片的底部最宽,因为在这里圆锥最宽,越接近锥顶处越窄,趋于一点.

再想一想,或许想到的是切片的顶部会较宽些.因为在那里切片与母线所成角度最大.而在底部,切片以小得多的角度切割圆锥.毫无疑问,如果你在圆锥的同一点上切若干次,较小的角度将产生较窄的截面.

令人惊讶的是这两种理由恰好有相同的说服力.它们彼此[37]抵消!切片实际上是完全对称的,它也是一个椭圆.

容易看出它与圆柱切片的联系.任一圆柱可以想象为一个圆锥,顶点移到无穷远处,从而这个圆锥的母线现在互相平行,而互相平行的切片大小与形状都一样.

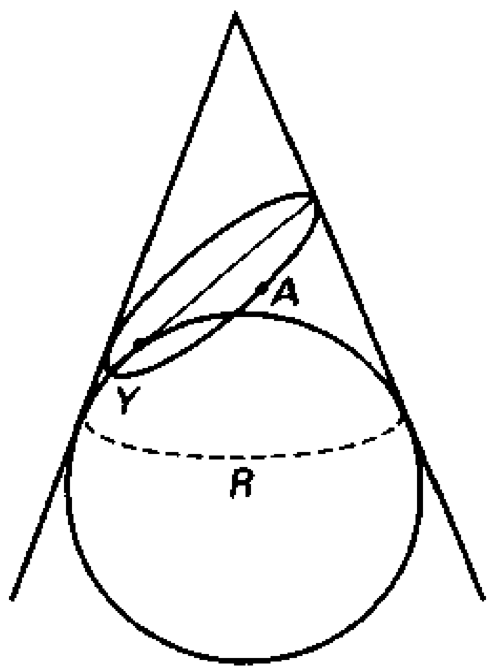
是否也有与用大头针和线画椭圆的方法相联系的事情呢?当然有的!古代希腊数学家早已发现了这一联系,他们在两千多年前首先研究了作为圆锥切片的椭圆,远在开普勒发现他需



要用椭圆来解释行星运动之前.

他们想象一个切片同前面一样的圆锥和一个放在截面与锥顶之间的球,这球恰好与截面相切于一点,记为 X,又与圆锥切于一个记为 P 的圆.

考虑椭圆上的一点,称它为 A 点.连接点 A 与 X 的线段与小球相切.从 A 点沿圆锥母线向上到与圆 P 相交的线段也与球相切.不仅如此,这两条线段的长度相等,因为从一点引出的、与同一个球相切的任意两条线段具有相同长度.

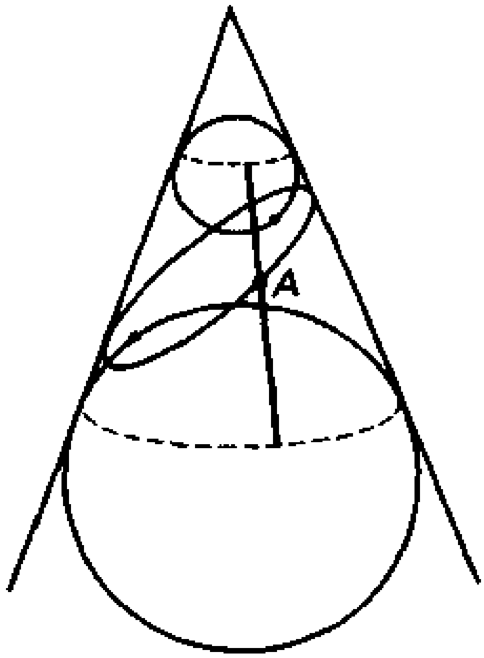


[38]

然后,他们考虑第二个相关的球,它与截面相切于 Y 点,与圆锥相切于记为 R 的圆.

与小球的情形完全一样,连接点 A 与 Y 的线段与从 A 点沿母线向下到与圆 R 相交的线段,长度相等.

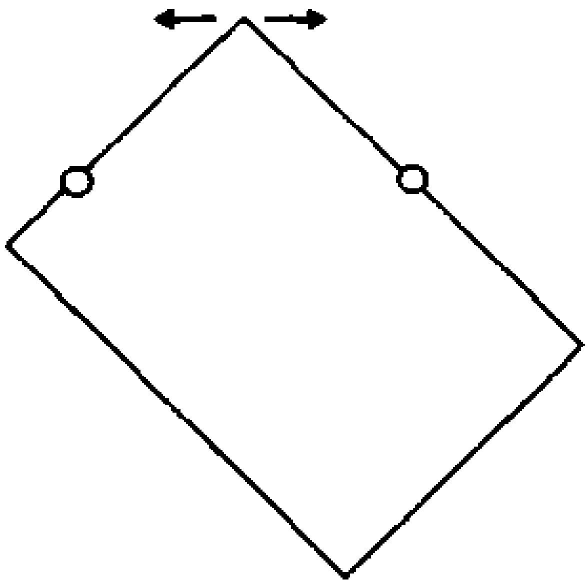
把这两种想法合在一起,总长 $AX+AY$ 永远等于另一线段的长度,这线段从 A 点上面的圆 P 开始,向下沿母线延伸经过点 A,到与圆 R 的交点为止.



因为这条线段永远有相同的长度(恰好是两圆之间的距离),$AX+AY$ 也就永远有相同的长度,这就是用大头针方法画椭圆的道理.

问题

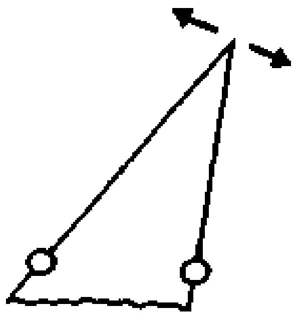
1.



在一张纸上按两个图钉,再取一张普通纸片,让它在两

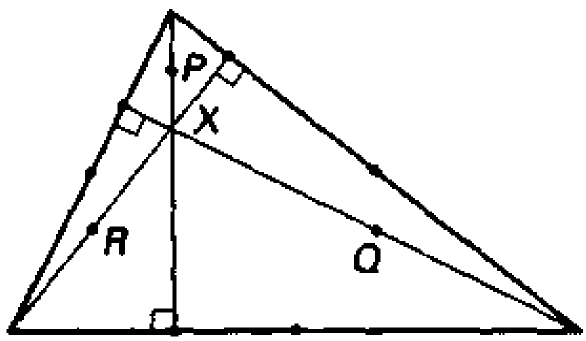
个图钉之间滑动，如图所示．这纸角落的顶点轨迹是什么？ [39]

2.



同上，在一张纸片上按两个图钉．但这次在两个图钉间移动的是一块三角板的较小的角，如图所示．这角的顶点画出一个什么样的图形？

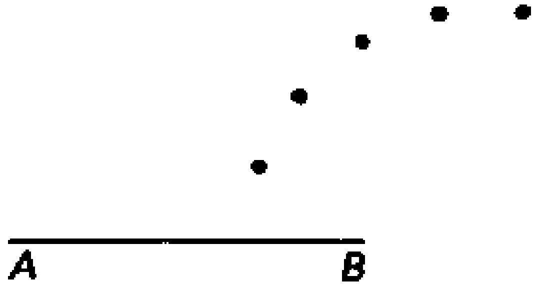
3.



在任一三角形内，三条边上的高交于一点 X．P，Q 和 R 分别是 X 与三个顶点之间的中点．

三角形的三边的中点，三角形三条高与边的交点，以及点 P，Q，R 之间有什么关系？

4.

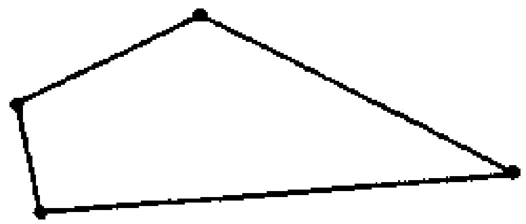


在纸片上标出两个点，称为 A 和 B，再在纸上标出尽可能多的点，这些点与 A 点距离是与 B 点距离的两倍.

这些点有什么特殊性?

5. 根据罗马诗人维吉尔的说法，安尼斯在流浪期间遇见了迦太基女王迪多，女王赐给他能用一张牛皮包围的土地. 假定他有远见把牛皮割成长长的细条，并利用直的海岸线作为领地的一部分边界，他应该怎样做才能围出尽可能多的土地?

6.



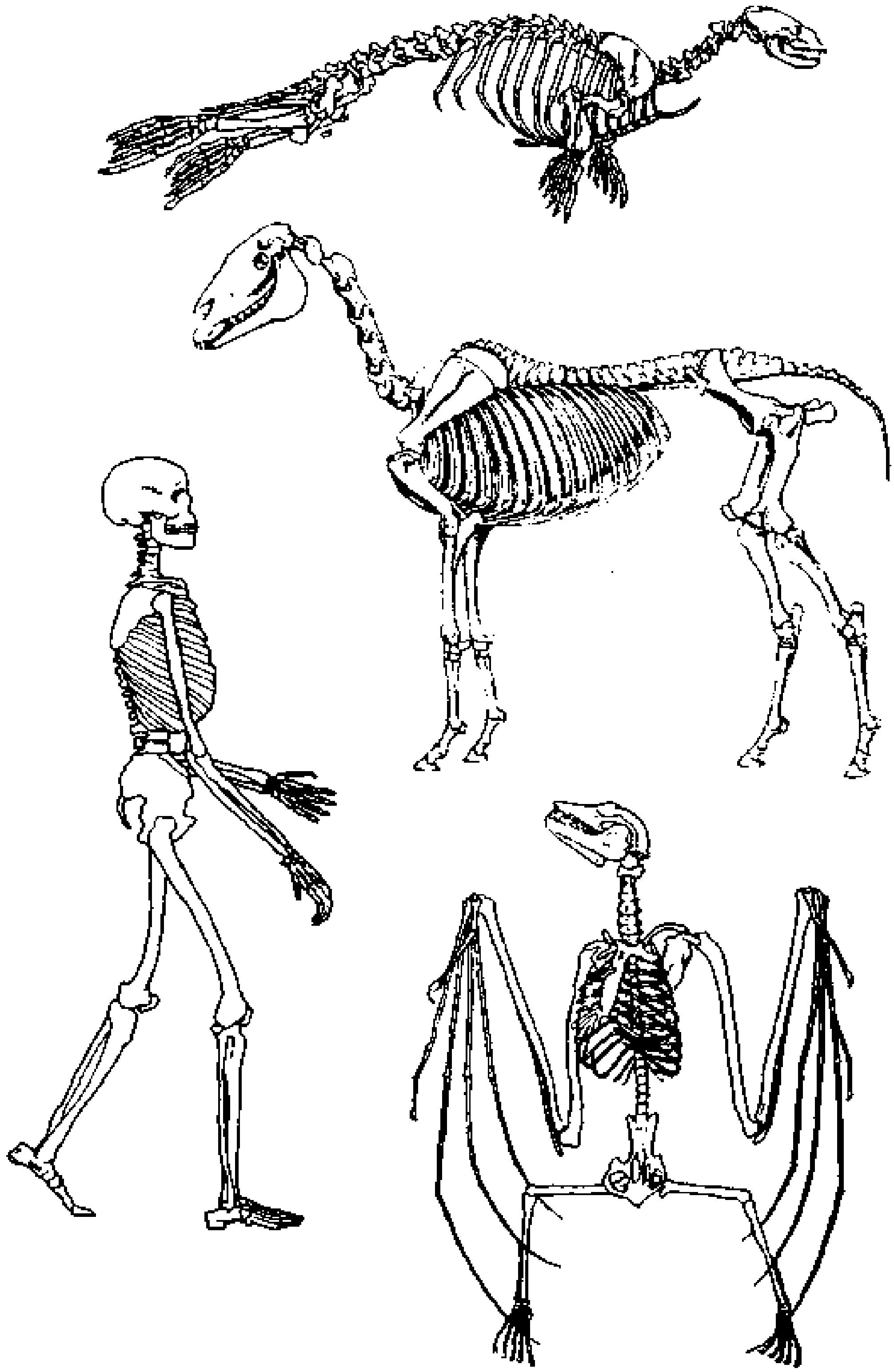
这个四边形的顶点装有铰链，它的形状和面积都是可变的. 什么时候它的面积达到最大值?

[40]

第5章 骨骼与结构

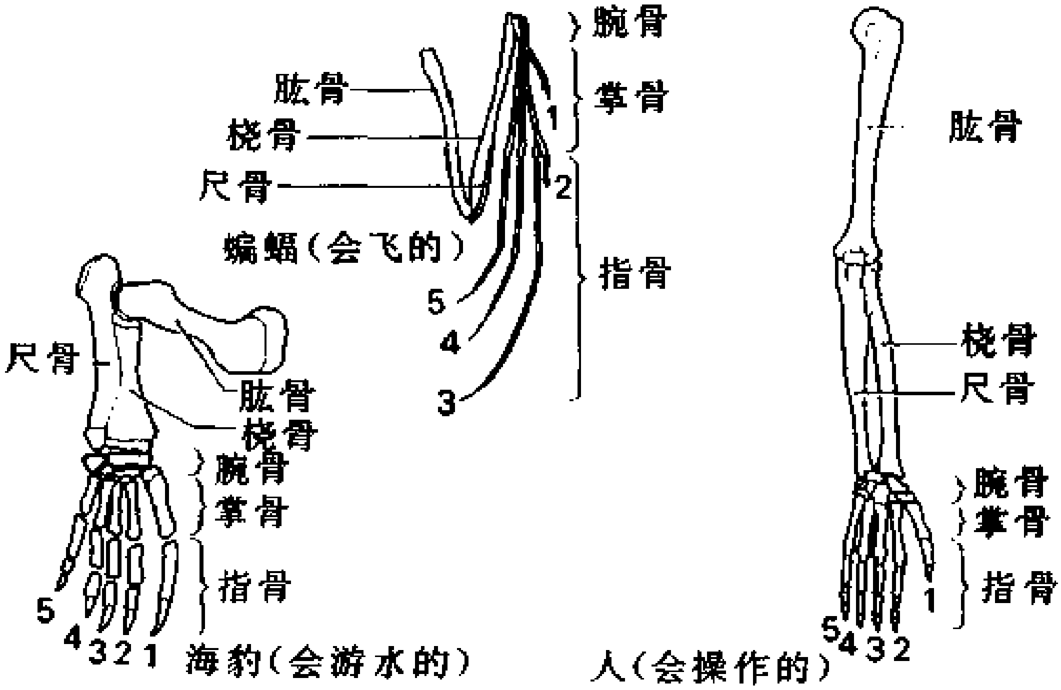


海豹,蝙蝠,马和人有什么共同的地方吗? 乍一看几乎没有、然而,这样匆匆一瞥常会使你误入歧途.它们的外观、栖息地和生活习性的确很不一样的,但内部就是另外一回事了.虽然外



观不同，但它们都是动物，因此内部器官是相似的．特别地，它们的骨骼惊人地相像．

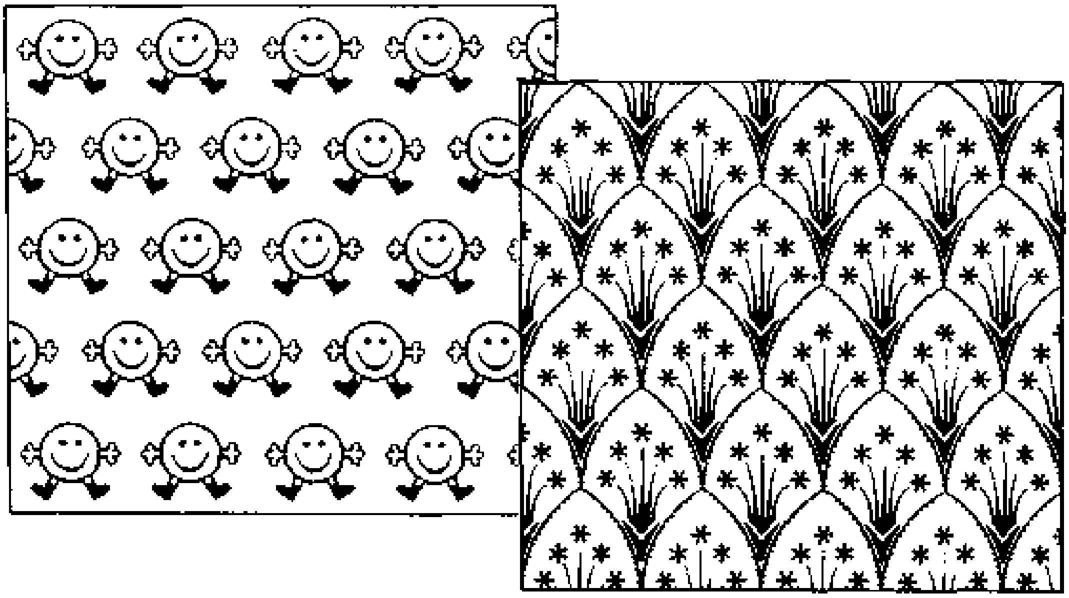
当然，海豹有一条尾巴，而人只在脊柱底部有一块小骨头，称为尾椎骨，但是每一种骨骼都有脊柱，肋骨附在上面，虽然肋骨的数目有所不同．更不寻常的是，蝙蝠的翅膀，海豹的鳍鳍和人的手臂，与外观上的差异相比，相似性更多．



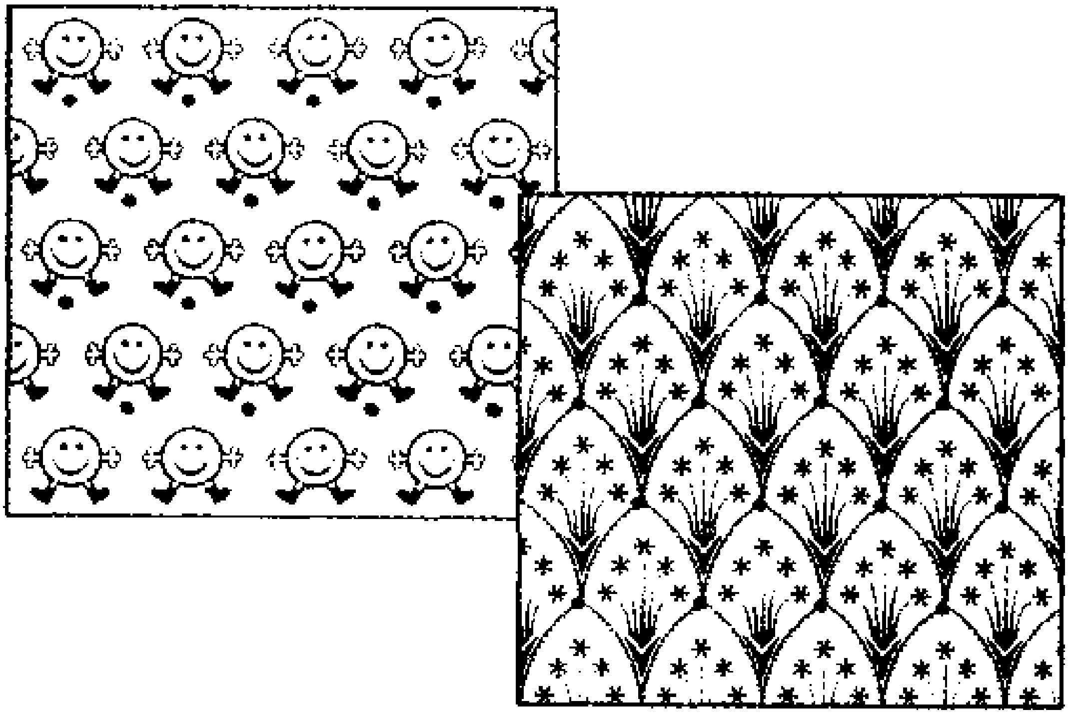
本章开头照片中的人能从肘部把下臂扭转差不多 180°．这是怎样做到的呢？上臂就不能以同样方式绕肩胛骨转动．差别就在臂骨里．上臂只有一根骨头，但是下臂却有两根骨头．当下臂转动时，它的两根骨头就互相绕着转动．每一根骨头在它们的关节里扭转得都不太多．在所有这类骨骼里都有这种杰出设计，由于它也存在于恐龙的骨骼里，至少有两百万年之久了．

下页中的这两种壁纸有多少相像之处？表面上看，它们的风格、图形、结构和给人的感觉似乎很不相同．

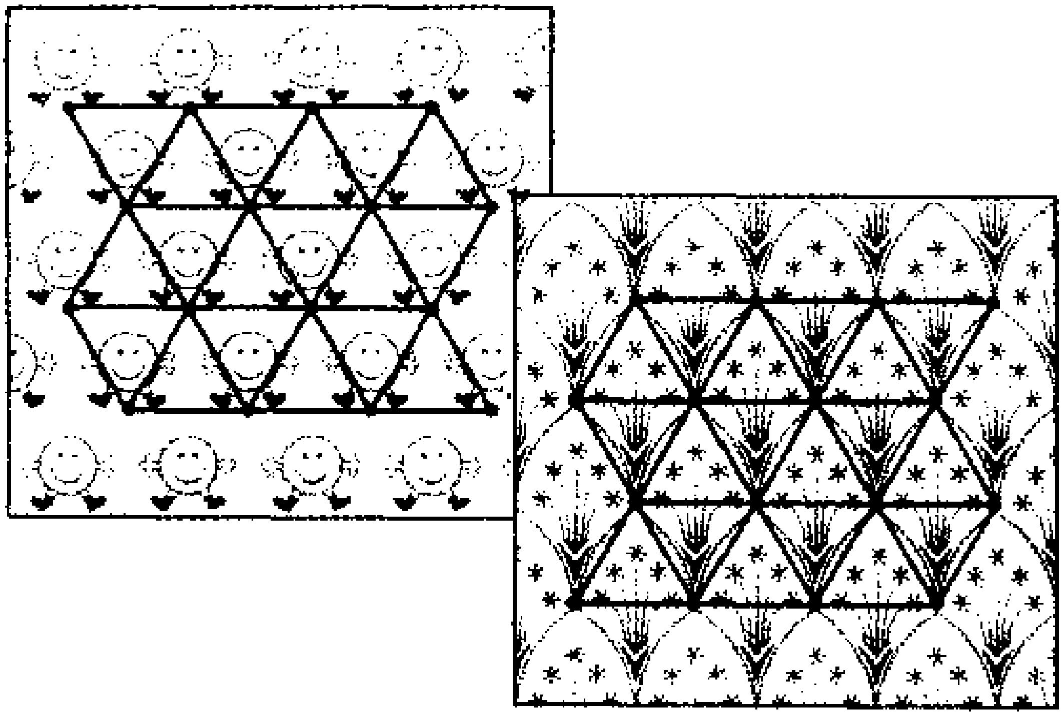
然而，如果我们强调的不是这些装饰图案的细节，而是这些图案的排列，会出现什么呢？



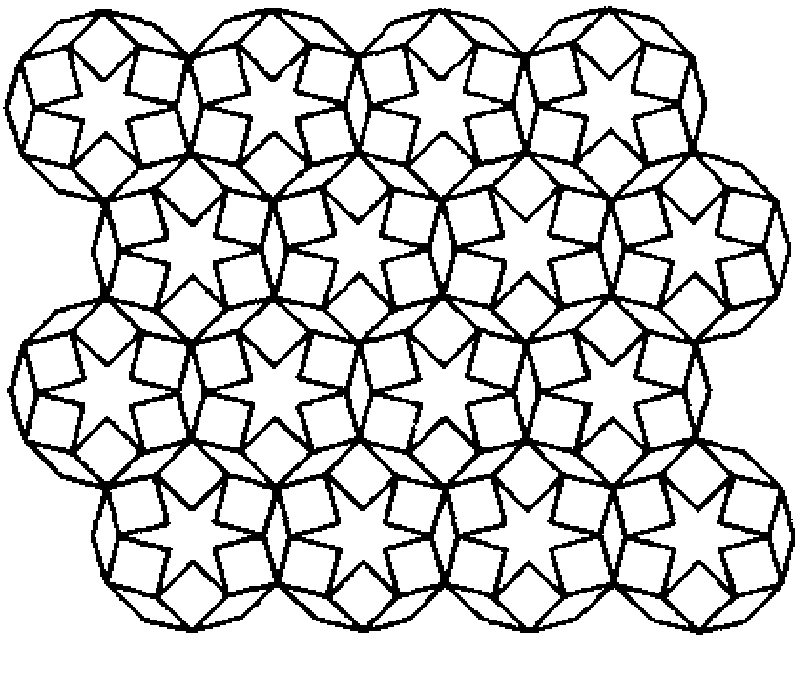
每种装饰的基本花样相同之处被突出出来,而图案本身则[43]退到幕后去.装饰之间的相似性明显地增加了.

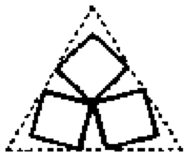


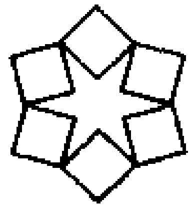
为了更有力地强调藏在下面的骨骼,图案进一步退去,并用直线将每个基本花纹里的对应点连接起来.毫不夸张地说,这些基本骨骼几乎是相同的,因而原先的设计有相同的基本结构.



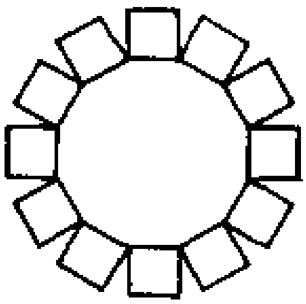
伊斯兰教禁止在艺术中用人像,因此穆斯林艺术家们被迫去发展更抽象的装饰图案.这个图案是一个非常简单的例子,然而它又有丰富的内涵. [44]







发现这图案结构的一种明显的方法是标明并连接六角星的中心.由此可知这图案是由左边的单元在各个方向重复出现而组成的.然而,看来这不是构造这个图案的最自然的方法.把它看成是第二个单元的重复肯定更为简单,这个单元中的对应点是正六边形的顶点.这些正方形的小圈确实很显眼,但更仔细地看一看,可以看出有一个更大的正方形形成的圈(如下图),在这个六边形的外面,它才是"最简单的".



在这个图案里,由于正方形的总数没有增加,如果这个单元是另一个的两倍,每个正方形就必须在两个这样的单元里出现.现在这种情况,每个正方形是两个大圈的成员.

没有必要,并且确实也不容易争论哪种看图案的方法是最简明的.重要的事实是可否通过三角形,或者六边形的格点,以便能看出这个图案可以用简单方法构造,从而可以容易地复制、变化或发展.

我们的头脑真是令人惊奇而又神秘莫测,它们常常要花很长时间,用很多的语言和意象去弄清楚它能一眼看出的隐藏起来的图案.没有人需要分析两种壁纸设计中任一种隐藏在背后[45]的骨骼以弄懂它们.只有当我们选好一个来画时,我们才认识到需要一种我们能换成语言或意象的、不同的和更深的理解.

我们的头脑在辨识音乐或文艺中看不见的模式方面也同样聪明.辨识摇滚,瑞盖①,或者恰—恰—恰的节奏是多么容易!然而有多少读者能用一些话去解释它们之间的差别呢?

以韵律来辨识一首五行诗并不难,即使不是所有五行诗在格律和重音上都有相同的模式:

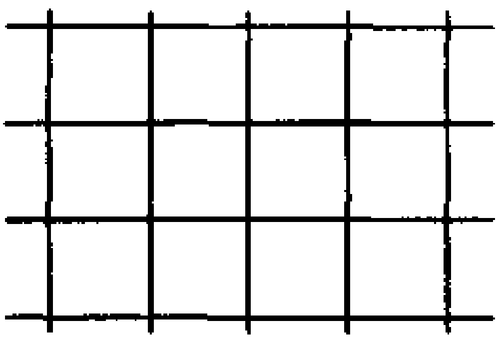
哒哒哒**哒**哒哒**哒**,
扑通**扑通**扑通扑通**扑通**扑通扑通**扑通**:
当他**哭喊**着**姑娘**在哪里,
她回答,我**害怕**.
扑通扑通扑通.

作家和诗人在空闲时写些滑稽作品,这些作品完全仿效原作的结构,也许还有音调和感觉,然而,他们只是在打趣而已.

也许不是巧合,路易斯·卡罗尔(Lewis Carroll)——查尔斯·路德维格·道奇森(Charles Lutwidge Dodgson,1832—1898)的笔名,牛津大学基督学院的数学导师,是一位伟大的模仿作家,但作为严肃的维多利亚时代的诗人,他完全失败了.相信数学家,他舍掉通常的意义突出了模式.

问题

1.

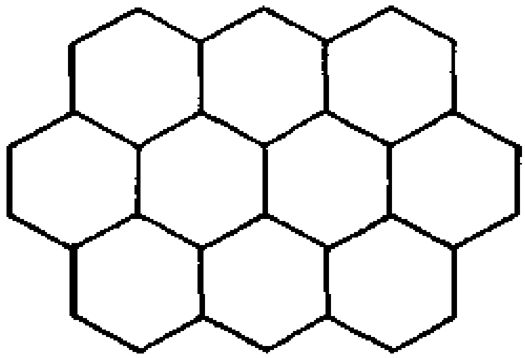


把正方形拼花板的角切掉,构造出小正方形和八边形的拼花板.

---

① 瑞盖(reggae)是西印度群岛的一种舞曲.——译者注

2.



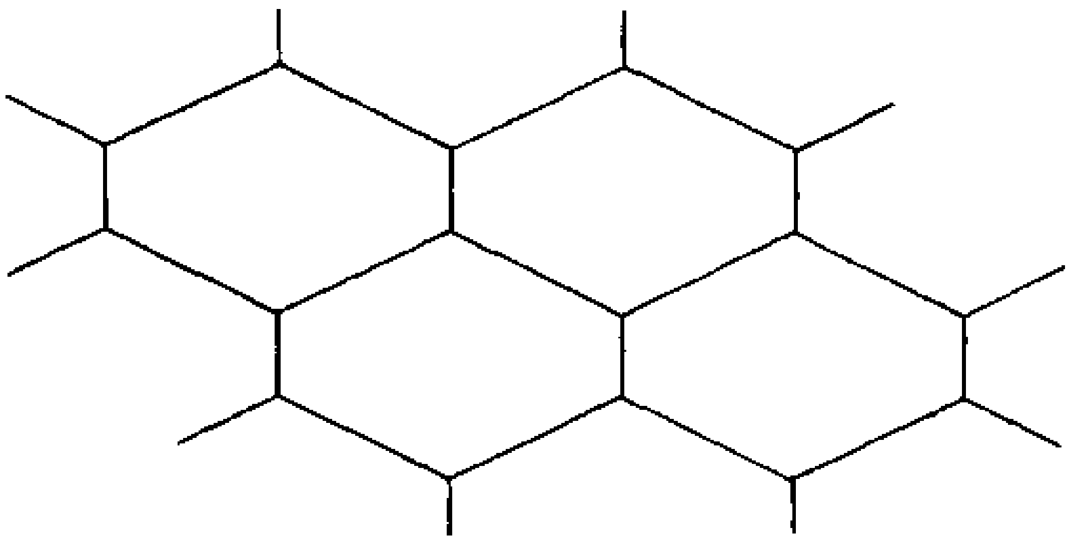
把这些六边形分开一点，并在空隙中填满正方形与等边三角形，做成新的拼花板.

[46]

3. 用六边形和等边三角形砖可以拼出多少种半规则的拼花图案？所谓半规则的意思是围绕每个顶点，所选的花砖相同，并以相同次序排列.

4. 在六边形的蜂窝状拼花板中，由不相邻的顶点，可以组成什么样的图案？

5.

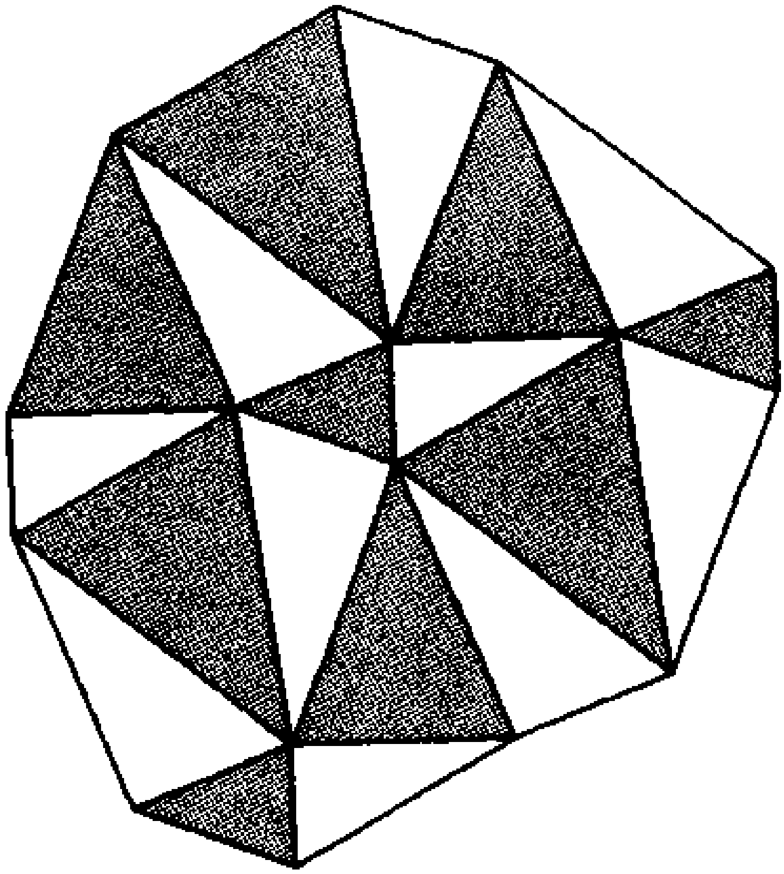


像第 2 章第 1 题解释的那样，这个由拉长的六边形拼成的板可以构成一个相同的五边形的拼花板.

这里有另一个简单性质. 标出每个六边形的不相邻的顶

点.它们做出什么样的拼花?

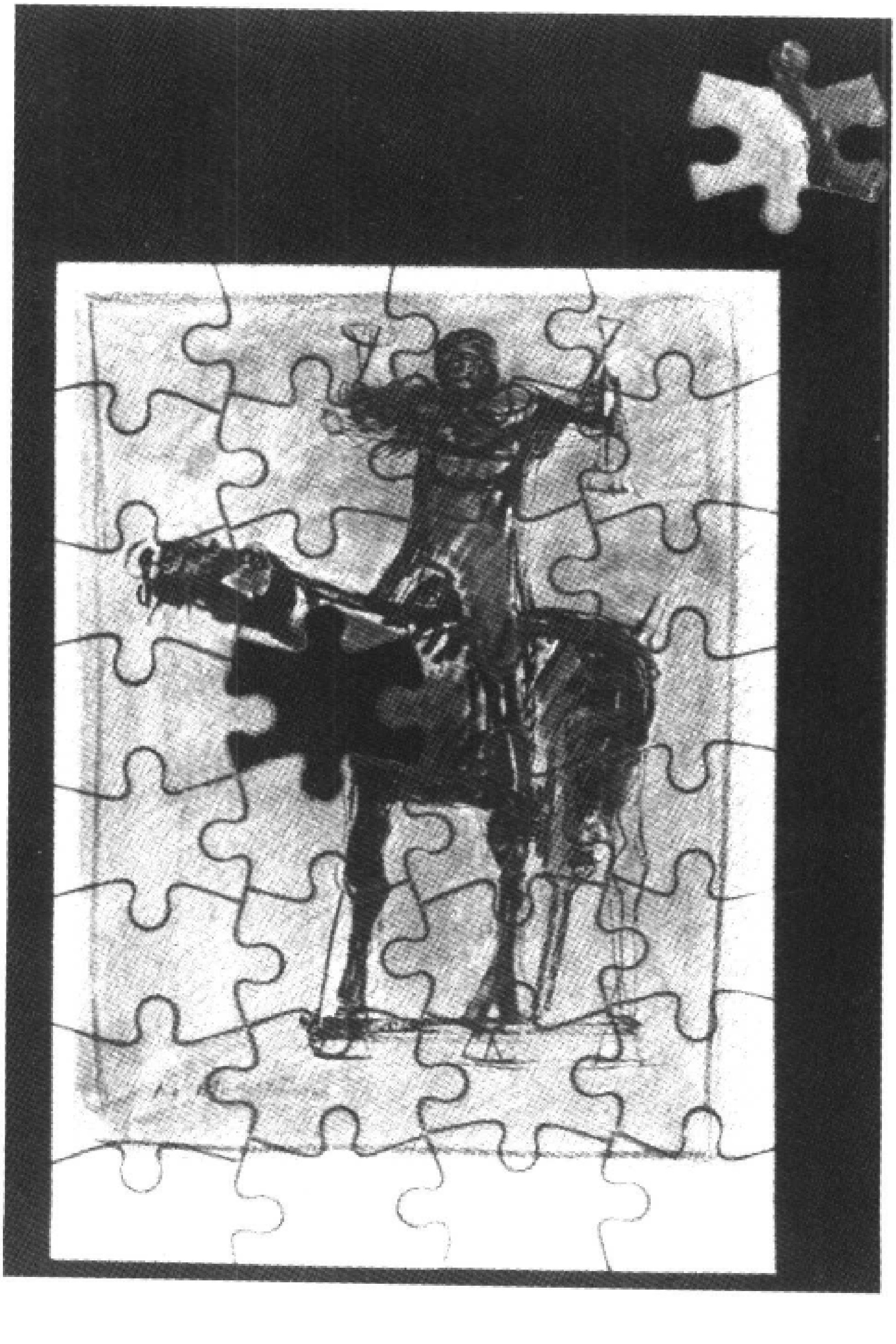
6.

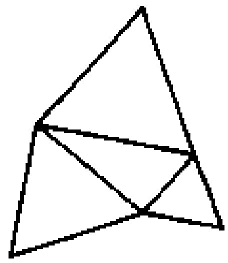


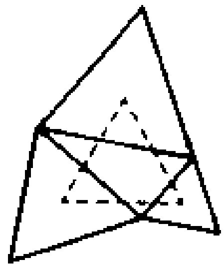
这个拼花板是由两组三角形构成的.有阴影的三角形彼此相似,没有阴影的三角形也彼此相似.

能把这个拼花板看成由不规则的六边形拼成的吗?由两种不同的五边形拼成的?由三种不同的四边形拼成的? [47]

第6章　拓展视野





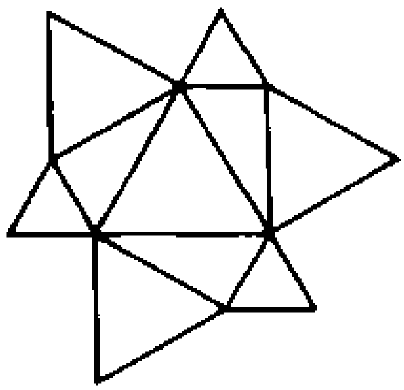


这是个任意三角形,在每条边上作一个等边三角形.乍一看这里似乎没有什么特别的东西.

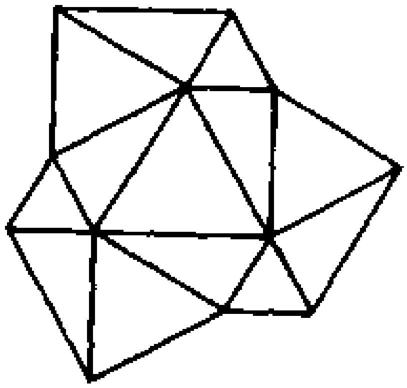
然而,如果我们标出等边三角形的中心,连接它们,令人惊叹的是又出现了一个等边三角形.这决不是偶然的,你可以选择任意形状的三角形来做试验,情况总是那样.这个结果称为拿破仑定理,因为人们认为法兰西将军拿破仑发现了它.

在看起来杂乱无章的图形中发现模式和对称性,往往是一件令人赏心悦目、颇具迷惑力的事情.它也暗示我们并没有看到在原先的图形里应该看到的全部东西.一定有另一种方法去看它,用这种方法看,一开始就会有更多的对称性,因而也就能更自然地得出结论.

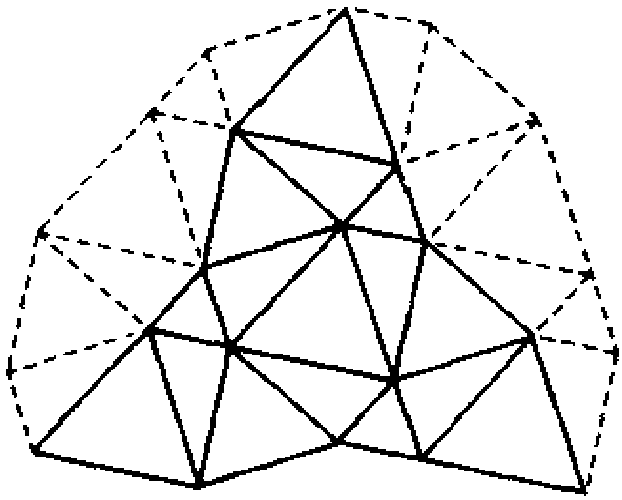
一种想法——这种想法常常是用来解几何题的——是把原先的图形看作拼花地板的一部分,这拼花地板是平面的一种铺法,用规则的图形永远重复下去.为了看看这种想法是不是行得通,把大等边三角形看作图案的"中心",并且在它的另两边上都重复放置另外三个三角形.



到目前为止,一切顺利,但现在第一个考验来了.围着边的窄窄的空隙可以按规则的方式填满吗?是的,能做到,只要在每个空隙中再填进一个原先的三角形.

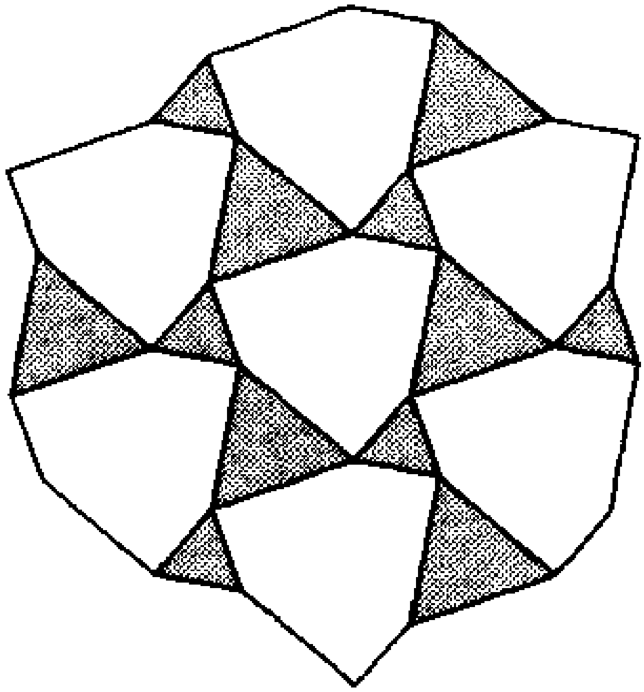


这图形看上去已经很对称了,但还可以不断向外扩展,进一[49]步增加对称性.

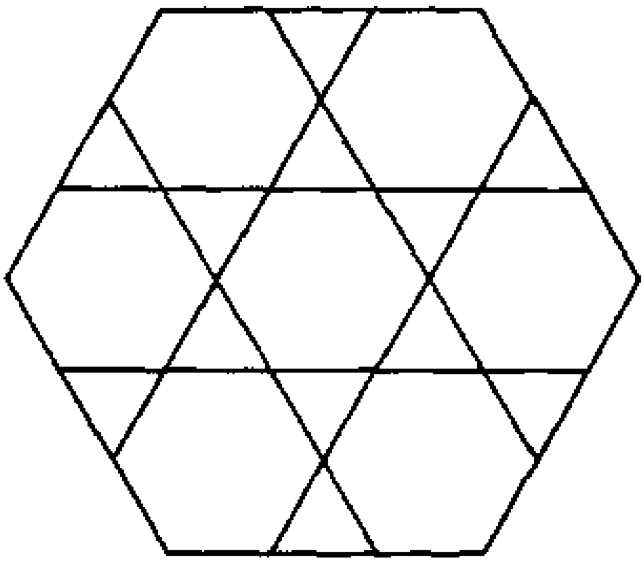


现在大等边三角形第一次被重复,并且不难看到这个模式将在所有方向上永远继续扩展下去.

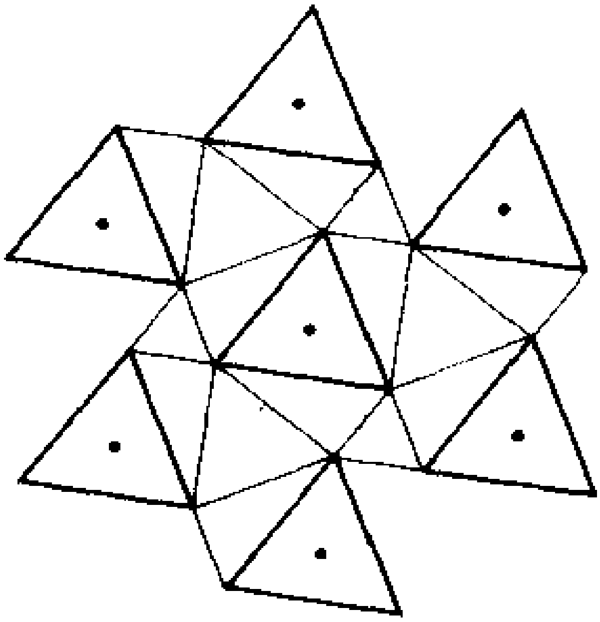
把某些三角形涂上阴影并且抹去一些线段,对称性更一望而知.



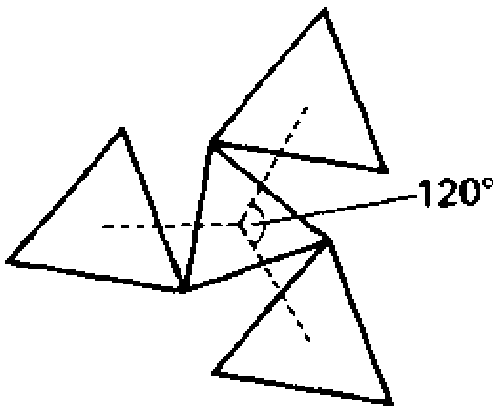
下面这个图可以看作众所熟知的正六边形和等边三角形拼花的变形.这个拼花的对称性是容易看到的.但我们的拼花,对称性也差不多这么清楚.



[50]

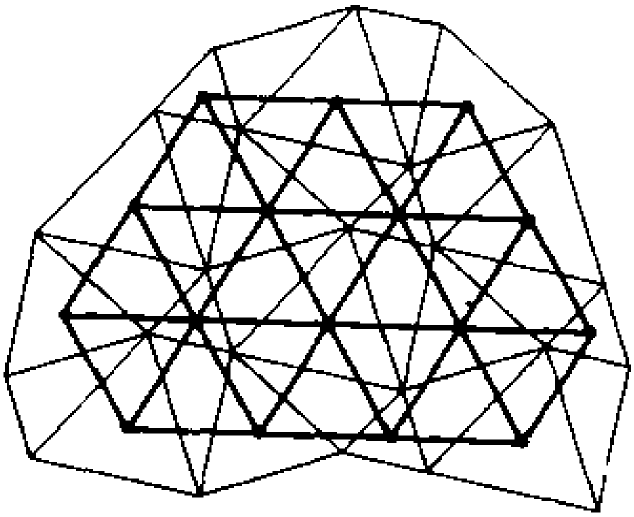


六边形已经变形，但它们的排列还同以前一样规则．注视中等的等边三角形和围绕着它们的大等边三角形，我们能看到一种类似的对称性．



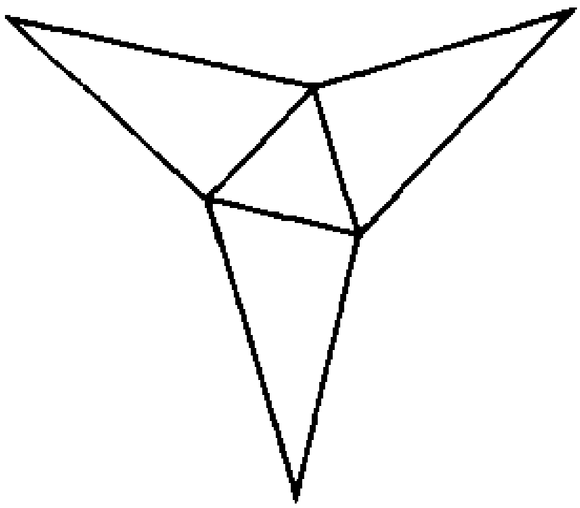
连接中心得到三条轮辐，它们之间的夹角都是120°．相同的对称性出现了，只要把小等边三角形的中心与最靠近它的中等三角形的中心连接起来（或者用三角形的任一其他组合）．

像下图那样，把轮辐网覆盖在整个拼花图案上，突出了这个拼花的骨骼事实上与普通等边三角形拼花是一样的．特别地，我们几乎顺便，毫不费力地注意到围绕一个原始三角形的任何三个等边三角形的中心也形成另一个等边三角形．



[51]

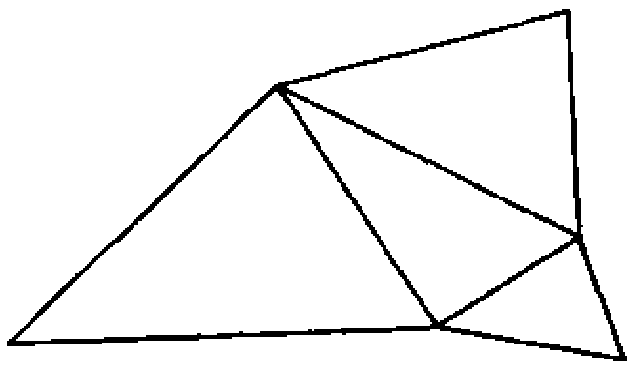
虽然图形对称得那么好,我们的解释看来倒有些不对称了.为什么我们注意力集中到大的和中等的等边三角形上面呢? 想必,按照另外的做法,例如,通过看最小的和中等的等边三角形,我们同样能简单地看出答案吧?



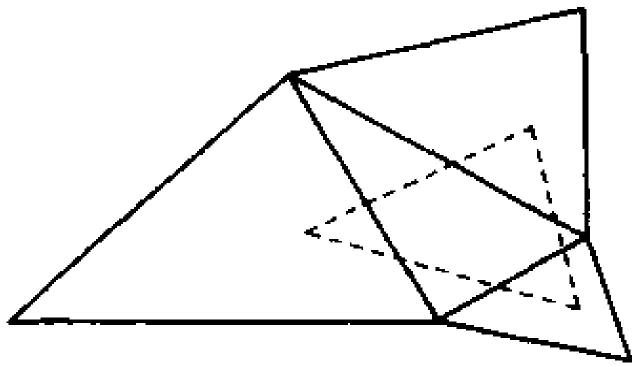
事实上我们是能做到的,虽然不很容易看出来,因为我们的脑子既不那么聪明,也不习惯于看那种星状六边形.然而我们能看出来这个拼花图案事实上有同62页上面的图一样鲜明的对称性.

这个拼花图案解答了原先的问题,但决不是只有一种重新

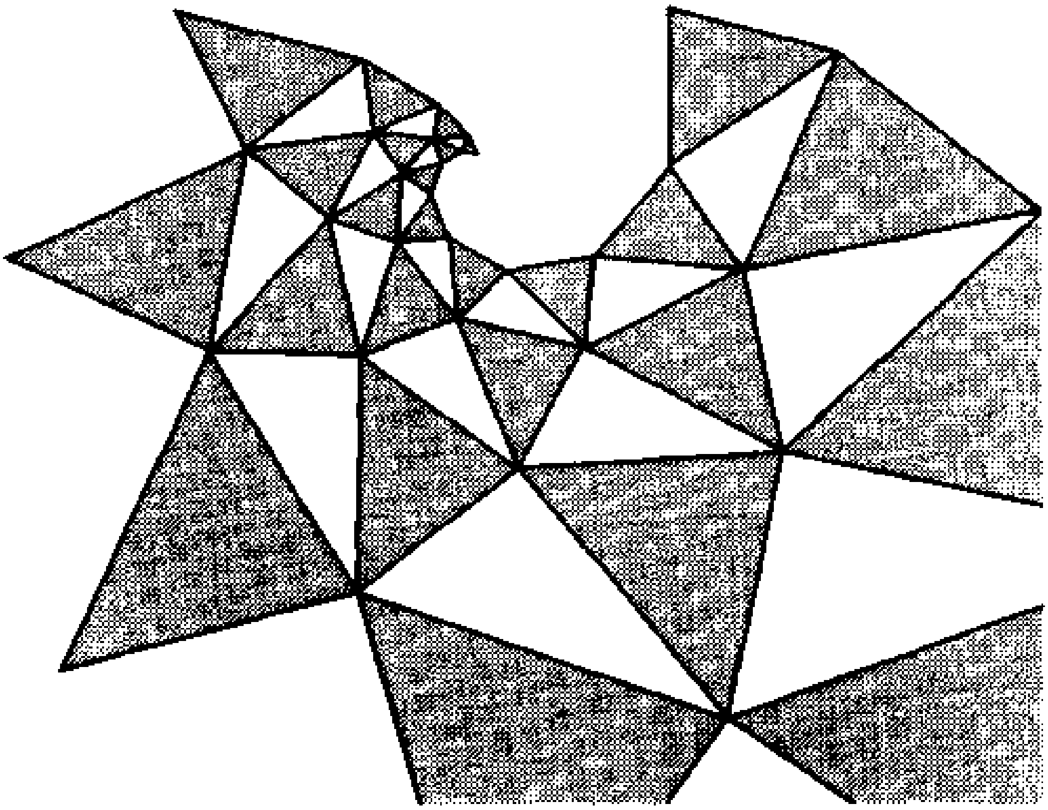
看它的方法,这仅仅是最简单的一种.它也不能回答其他可能在心中涌现的问题,如,为什么原先增加的三角形必须是等边的?等边三角形本身是对称的,但原先的任意三角形和等边三角形之间的关系是完全不对称的.这像是把完美的圆同偏心的椭圆去作比较.为什么不能把任意形状的三角形加到原始三角形上去呢?



这个图看上去像我们原先的图,但三个增加的三角形是不等边的,只是彼此相似.根据你怎样看它,这种不规则的三角形或者没有中心,或者有几个不同的"中心".没有关系,我们可以[52]像通常那样简单地把对应点连接起来.



它们形成的三角形是什么形状?同三个原先的三角形的形状相同.这是原先思想的一种推广.这个试验结果可以用拼花图案来解释吗?是的,只要把拼花图案这个词的含义作一点引申.



为了使这个拼花图案活动起来,想象在纸的中心有一种黑洞.当三角形绕着黑洞螺旋形地转动时,它们被吸向这个中心,变得越来越小但保持它们的形状不变.

把注意力集中到涂阴影的三角形上.它们的形状都一样,互相的关系相同而且不变.空间本身由于其中心的黑洞的影响而弯曲.特别地,任一涂阴影的三角形能平稳地运动进入任一其他涂阴影的三角形的位置,不改变它的形状.从三个连环的涂阴影的三角形中取出三个对应点恰恰是一个涂阴影的三角形在扫过螺旋面运动时,描述它的位置的一种方法.

不涂阴影的三角形怎么样呢?它们也在螺旋面上运动,只改变大小,不变形.像同一张照片的正片与负片,每一组三角形都具有这种螺旋性质.

[53]

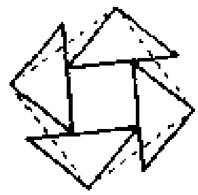
问题

1. 用全等的三角形构造一个拼花图案,证明任意三角形的内角

和是 180°.

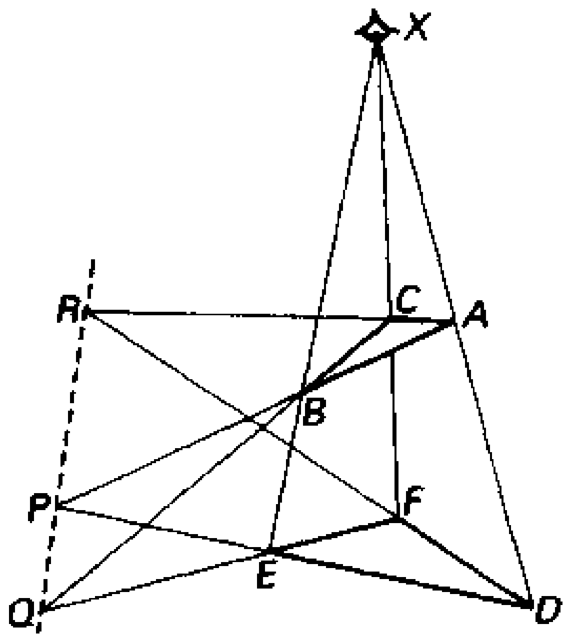
2. 用全等的四边形构造一个拼花图案,证明任意四边形的内角和是 360°.

3. 阿拔尔·瓦发(Abul Wafa,940—997)发现一种方法,分解两个任意正方形,再拼成一个正方形.较大的正方形被切成四个四分之一,再把它们放在较小的正方形的四周.按虚线切四次,切下来的小片奇迹般地填满内侧的空间从而形成一个正方形.



将这个图复制做成拼花图案.借助它说明阿拔尔·瓦发是怎样发现这个方法的.

4. 笛沙格(Desargue)定理说如果两个三角形"在透视上"源自一点①,那么对应边的交点位于同一直线上.



① 意即两个三角形的顶点位于一点出发的三条"透视"线上.——译者注

这定理的意思表示在图里，因为对于在 X 点的观察者，对应顶点在一条直线上，所以对应边的交点 P，Q 和 R 在同一直线上．如图所示．

问题是把这平的 2 维图“看”成点、直线和平面的 3 维图．这样，笛沙格定理就变得显而易见了．

5．把数列 0　1　12　63　208　525　1116　… 看成是这个模式的一部分：

0　1　12　63　208　525　1116

1　11　51　145　317　591

10　40　94　172　274

30　54　78　102

24　24　24

0　0

利用这点将原数列往下写．

6．把这数列看成在题 5 中出现过的模式的一部分：

6　15　40　__　162　271　420　615　862

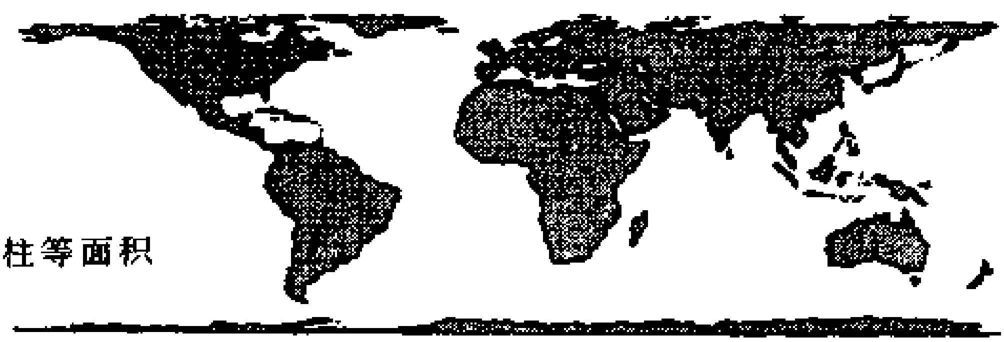
利用这点写出这个数列的缺项．　[54]

第7章 不 变 量

用一个旧的空心的橡皮球和一把刀或剪刀做个实验,可以正确地指出,球面不能在不改变形状的条件下展成一片平面.事实上,即使是一小片球面,譬如一小块足球皮,如果用力铺平,就会有一点变形.它会起皱,或者拉长,也可能被扯破.



麦卡托



圆柱等面积

地球的整个表面在被展平之前也必须变形,因而制图员要面对一个棘手问题.他们的地图的某些面貌将会是错误的.错多少?什么样的面貌可能被保留?虽然供给制图员的信息是一丝不苟的,情况可能更糟.结果是他们要选择将保留哪些面貌.上页中的地图展示了两种可能的画法.

麦卡托(Mercator)投影法是在1567年引进的.这也许是所有投影法中最著名的,广泛地用于地图册和挂图的绘制.它对领 [55] 航员来说有巨大的优越性,因为航向不变的航线(称为斜驶线或恒向线)在地图上变成直线.领航员可以画一条从船的现在位置到目的地的直线,测出航向,定好自动罗盘,然后就去睡觉.

(这并不完全解决领航员的问题.在海上两点间的最短距离是一个大圆上的一段弧,大圆不是航向不变的航线.然而,大圆航线可以容易地用几条较短的航向不变航线做相当好的近似.)

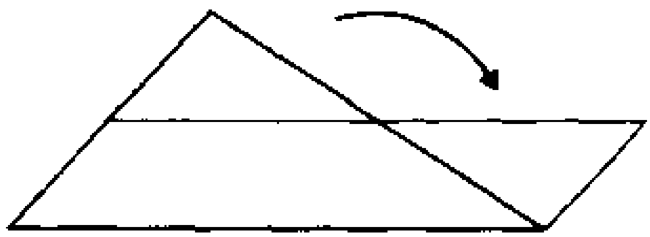
麦卡托投影法也不可避免地有它的不利的一面.面积的比较就特别困难,因为当纬线接近极点时彼此离得更远.一个众所周知的荒谬是格陵兰与南美洲的相对大小.在麦卡托地图上,格陵兰相当明显地是较大的一个.实际上它仅大约是南美洲大陆面积的十分之一.斜驶线是变换的一个不变量,它产生麦卡托投影法,面积不是不变量.

圆柱等面积投影法保持面积不变,虽然它改变了它们的形状.斜驶线不再是不变量,故而这个圆柱投影法可能是领航员的恶梦.现在格陵兰真正显得小了,跨立赤道的南美洲有一点小的变化.欧洲本身稍微缩小一点,因为在麦卡托地图上,它离赤道十分远,致使它略微变大了.形成对照的是,也穿过赤道的非洲大约同样大小,因而比欧洲显得相对大些,实际上也是这样.我和许多读者的幼年时期的地图册把欧洲画得比真实的大,更重要的原因是把它放在地图中央.

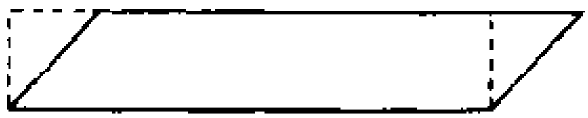
数学家们在不断探索把一个对象变换成另一个对象,或者一个问题变换成另一个问题的方法.如果某些特征同他们过去

熟悉的一样，那么，事情就简单多了.

在所有初等数学中，一个最简单的不变量是面积. 当一个平面图形被切开并以不同方式重新组装时，它的面积不变. 因此数学家总是计算三角形、平行四边形和其他简单形状的面积.

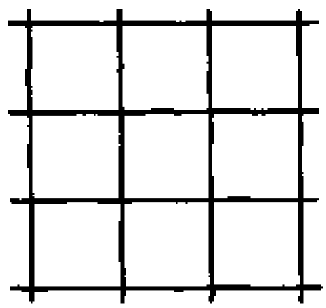


这里有一种方法把一个三角形——任意三角形，变成一个平行四边形. 面积保持不变，只是被重新放置而已.

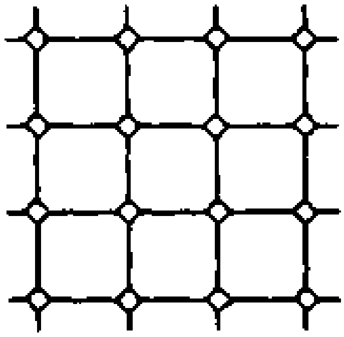


接着平行四边形可以用分割的方法变成矩形. 这里，在一端[56]切下一个直角三角形，把它放在另一端. 原先的平行四边形与新的矩形的面积相同.

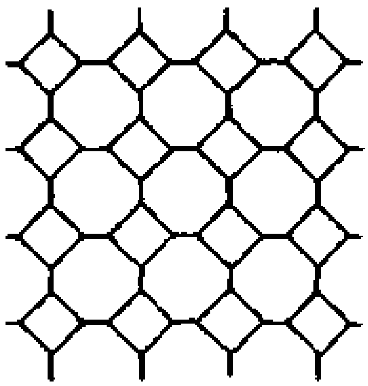
要想对如下熟知的构型设计出一些变化来，最容易的方法依赖于变换，这种变换只留下基本结构.



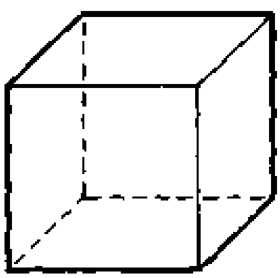
在正方形的每个顶点长出同样的小正方形，这个正方形图案的所有对称性保持不变.

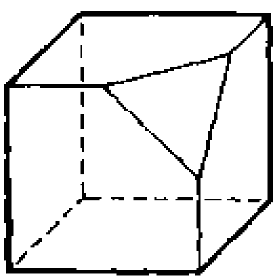


这些正方形可以越长越大，一直到它们几乎相遇，或者甚至重叠.对称性仍然保持.



更微妙的、隐藏着的和神秘的，但也正是有力的关系在多面体的面、顶点和棱的数目之间.

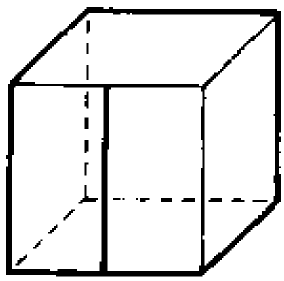




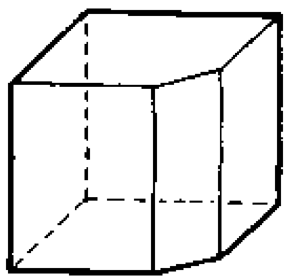
这里是一个立方体和一个缺角的立方体.立方体有6个面,12条棱和8个顶点.棱数差不多等于顶点数与面数之和:事实上,12+2=6+8.

切去一个角,一个增加的面出现了,还增加三条棱和两个顶点.这时棱数仍比面数与顶点数之和少2:15+2=7+10.

这个差2也是不变量吗?在三个面相交处切去一个角的确不改变它.1个多出的面和2个多出的顶点精确地与3条多出[57]的棱相平衡了.

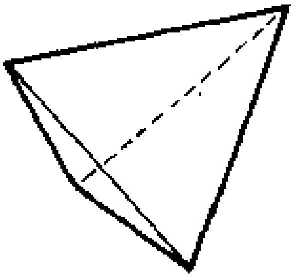


把一个面分成两个又怎么样呢?棱增加了3条.因为由新线连接的棱,每条都被分成两条.又有一个多出的面和两个新顶点.差没有变化!



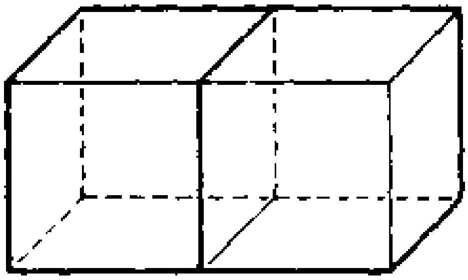
与一条棱平行地切下去怎么样呢?棱增加了3条.多出1个面和2个顶点.还是没有变化!

其他形状怎么样呢?四面体和切去四个角的立方体非常相像.事实上它就是一个四个角完全失去的立方体.不管怎样,我们来数一数.



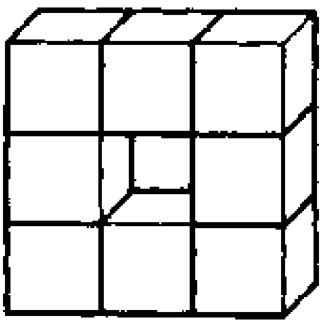
四面体有 6 条棱,4 个顶点和 4 个面.棱数还是少 2.

切掉角和棱,或者分割面似乎都对差没有影响.那么,把两个立方体粘在一起又怎么样呢?

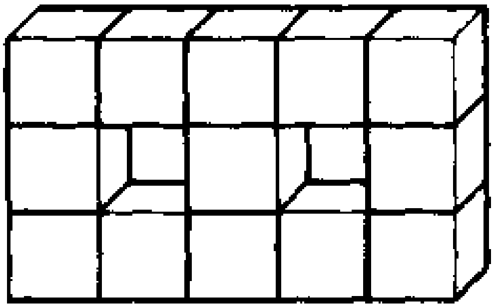


这是两个面对面的立方体.两个面完全消失了,绕着这两个面的 8 条棱和 8 个顶点已经减为 4 条棱和 4 个顶点.现在共有 20 条棱,10 个面和 12 个顶点.差保持不变,也许这并不令人惊讶,因为反思一下,两个面对面的立方体看上去很像是单个的立方体,它有四个面,每个被分割成两部分,而我们已经知道,当一个面被分成两个时所发生的事.

现在我们已经考虑过所有可能性了吗?绝没有!假设我们仍把立方体粘在一起,但不在一条直线上. [58]



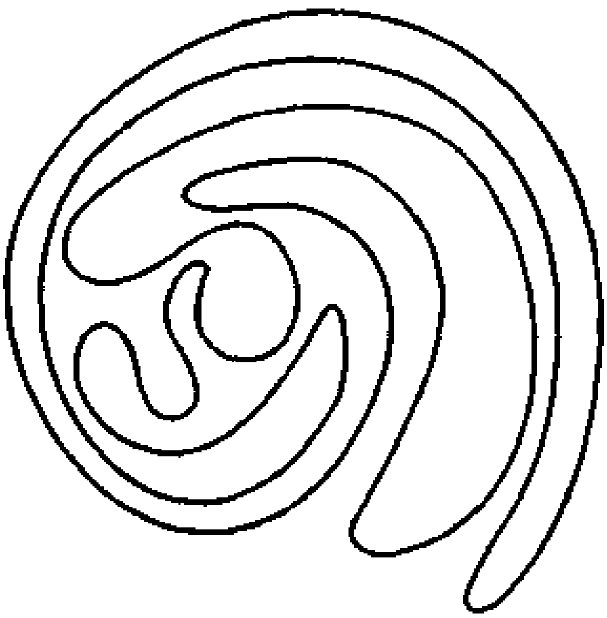
这 8 个立方体做成一个圈，我们希望它会提供一些新东西，因为当这个立方体圈完成时，棱、面和顶点失去了不寻常的个数．我们并不失望．这个方的面包圈有 32 个面，32 个顶点和 64 条棱．棱数不缺少，并且“面数＋顶点数－棱数”的值对所有多面体不是不变量．至少它有两个值 2 与 0.



这些是仅有的可能性吗？一旦一个诀窍奏效，总会吸引你再试一下．这个多面体穿有两个洞，“面数＋顶点数－棱数”是多少？

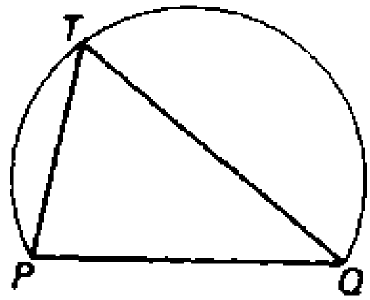
问题

1．

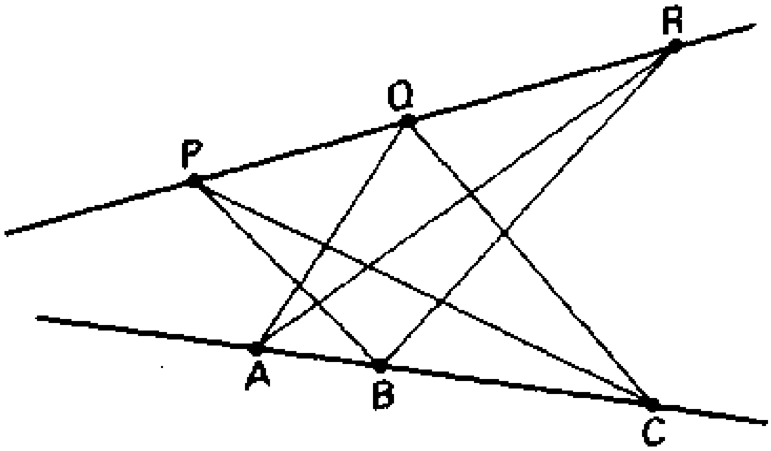


似乎是非常明显的,如果你画一条封闭曲线,如图所示,那么,无论你怎样画,这曲线总把平面分成两个部分,内部和外部.试找一个曲面,对这种曲面上述结论不成立,从而证明这不是所有曲面的特征. [59]

2. 取圆的一段,将两个端点与圆上任一点,如 T 点,连接起来.不管 T 点怎样选,所得的图形有一个特别的性质.它是什么?



3.



这里有两条任意选取的直线.在每条直线上任意选取三个不同点.这些点记作 A,B,C 和 P,Q,R.每个点都与另一直线上的两个不正对着它的点相连.

画好的图有一个特性,它与原先的六个点的位置无关.这特性是什么?

4. 什么样的普通运算使分数值保持不变?

5. 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 ……

这称为斐波那契(Fibonacci)数列.每个数是前面两数之和.相继两项的比很快地越来越接近于黄金比,它等于1.618033….

例如，

$$\frac{3}{2}=1.5,$$

$$\frac{21}{13}=1.61538\cdots,$$

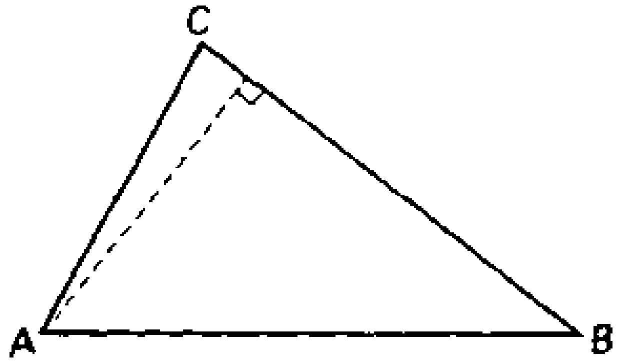
$$\frac{377}{233}=1.618025\cdots.$$

当数列从一对不同的数，例如 2 与 9，开始时：

2　9　11　20　31　51　…

极限比值是什么？

6.



取一个任意三角形 *ABC*，从 *A* 点向 *BC* 边作垂线.

从 *B* 点向 *CA* 边，从 *C* 点向 *AB* 边作类似的线，称为高. 不管你从什么样的三角形入手，最终的图形总有一个特殊的性质. 它是什么？

[60]

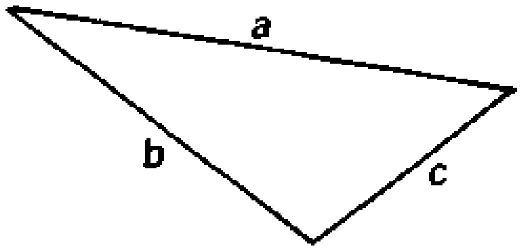
第8章 特　例



当三角形的三条边长已知时，三角形的每个性质，除位置外，都是确定的.特别地，它的面积可以用这个公式计算：

$$面积=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

这里 a,b 与 c 是三条边的长，s 是三边长度的和的一半.例如，如果边长是 13 厘米，14 厘米，15 厘米，那么，它们的和的一半是 21 厘米，而面积是 $\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$，即 $\sqrt{(21\times8\times7\times6)}$或 84.(这是罕见情况：三角形的边长是整数，面积也是整数.通常面积是无理数.)



这个公式用起来容易，并且正如人们期望的，它是均衡的.在公式里，边长 a,b 和 c 必然是对称的.然而，第一个因子 s 不太对称的.为什么会有这个因子呢？

从公式入手来回答这个问题，即使不是不可能的，也是极其困难的.然而，从另一个甚至更漂亮的公式容易看到答案，这个公式是印度数学家婆罗摩笈多(Brahmagupta，598? — 660?)发现的.

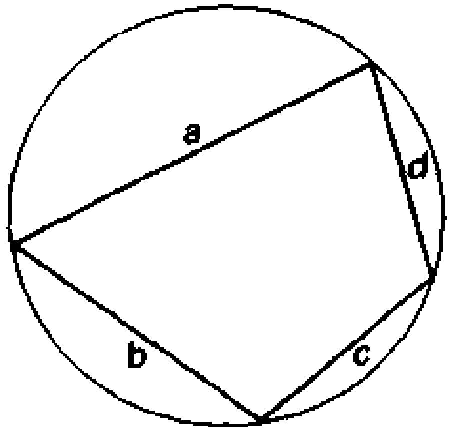
一般来说，由四边形的边长计算它的面积是不可能的，因为四边形不像三角形，它本来就不是刚性的，当边互相绕着转动时，面积会改变.

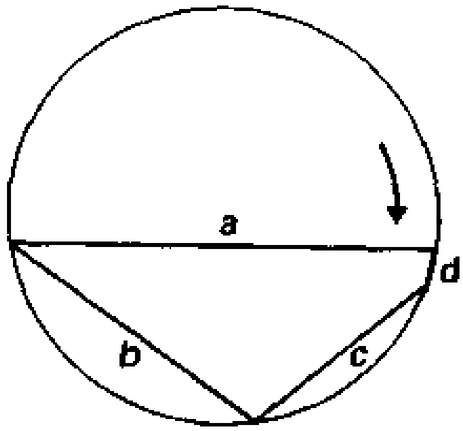
然而，要求四边形的顶点在同一个圆上，我们就能固定它的形状和面积.这时它称为圆内接四边形.

婆罗摩笈多公式是

$$面积=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

这里 a,b,c 和 d 是四条边的长度，而 s，如前所述，是边长和的一半. 请注意现在公式是完全对称的了. 也请注意这个公式与三角形面积公式很相像. 我们怎样才能把一个“搬到”另一个上去呢？





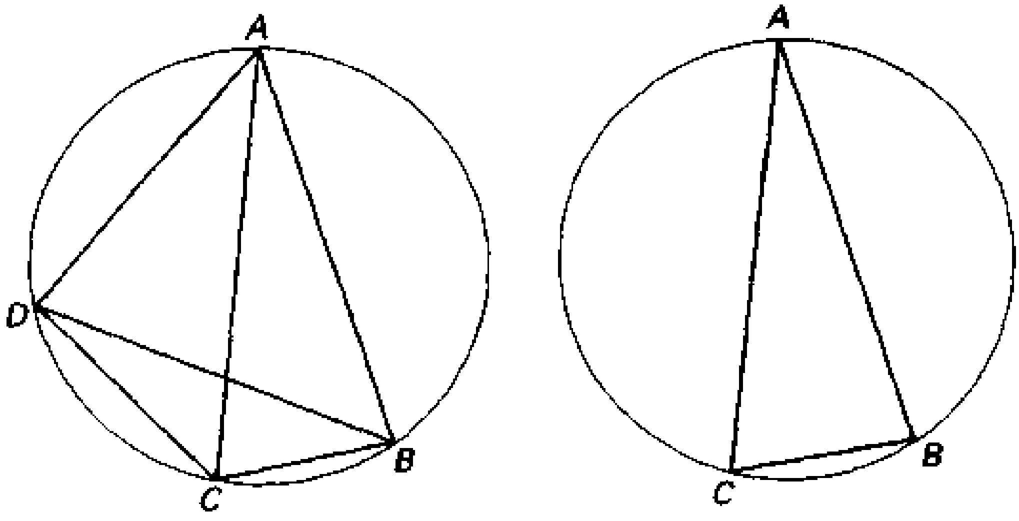
答案是简单的. 我们把三角形看作圆内接四边形的一个特例，想象四边形的一条边越变越短，直到“它的长度为零”. 此时 [62] 圆内接四边形变成三角形，并且在婆罗摩笈多的公式里有因子 $(s-0)$ 即 s 出现了. 由于毫无例外地，任意三角形的三个顶点都可以画在一个圆上，我们可以把任意三角形看作是一个圆内接四边形，并按婆罗摩笈多公式计算它的面积.

把三角形当作圆内接四边形的思想有多重要，有多少用处？在多数情况中答案是毫无用处. 例如，托勒密(Ptolemy)定理说，在任一圆内接四边形中，对角线的积等于对边的积之和.

托勒密定理也有一个特例，就是一条边的长度是零. 这可能告诉我们一些有关任意三角形的东西，是什么信息呢？想象一条边的长减少到零，使得点 D 变为点 C，DC 的长缩减到零.

结果变成三角形 ABC，于是托勒密定理告诉我们，$AC\times BC=BC\times AC$. 多显然！多无趣！

婆罗摩笈多公式和托勒密定理，应用到三角形上，解释了两

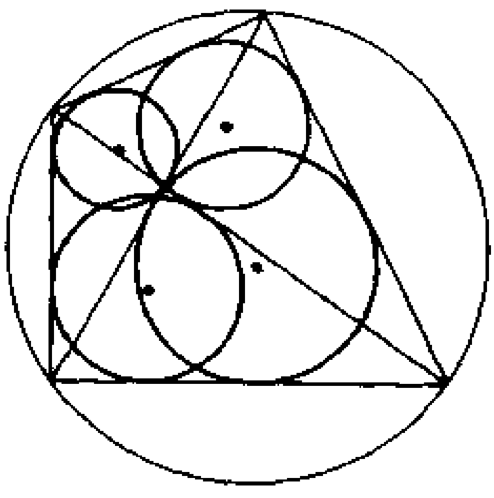


$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$$

种极端的可能.婆罗摩笈多公式的特例极其有效,极其有用,而托勒密定理的特例是平凡的,可笑的.

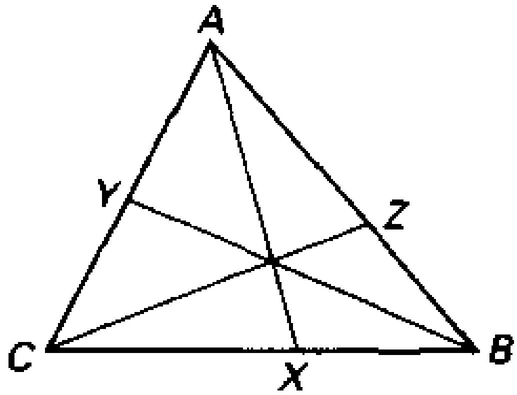
当用使长度为零,或使两点重合的方法来产生一个特例时,总存在结果平凡的危险.事实上,或早或迟,结果必定变成平凡的,因为最后将没有点或线留下以做出有趣的图!

圆内接四边形本身是个特例,但有很大好处.它的顶点都在一个圆上这个附加条件给了它很多性质,这些性质在多数四边形里是完全没有的.除了婆罗摩笈多和托勒密的结果,例如,还[63]有在第一章里讨论过的对角的性质与这个图的特殊性质:



四个三角形中，每一个都有一个内切圆，这四个三角形是由四边形与它的对角线组成的. 四个圆心组成一个矩形.

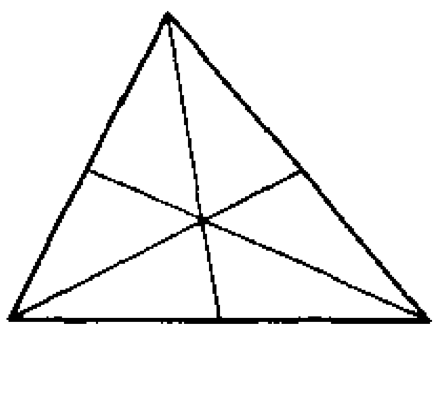
这寓意似乎是，在数学中如同在艺术和日常生活中一样，太少的条件提供太少的结构，而太多的条件挤出所有有趣的可能性！



西瓦(Ceva)定理说，如果在任一三角形的三条边上各选定一个点，使得

$$\frac{AY}{YC}\times\frac{CX}{XB}\times\frac{BZ}{ZA}=1,$$

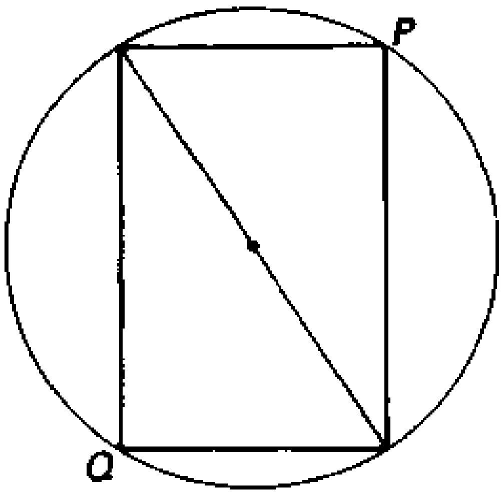
那么，三条线段 AX，BY，CZ 相交于一点. 当 X，Y 和 Z 是各边的中点时产生一个非常明显的特例，因为这时三个比都是 1，它们的积也是 1. 这时，出现了什么定理？这就是三角形的三条中线交于一点的巧妙的定理.



当每条边分成其他两条边的比时，这个特例就不明显了.三个比的积又是1，为什么这也有意义呢？因为如果 Z 分 AB 为比 $AC:CB$，那么 CZ 是平分角 C 的直线，现在西瓦定理说出另一个熟悉的定理，即三角形的三条角平分线也过同一点.这点是[64]三角形内切圆的圆心.

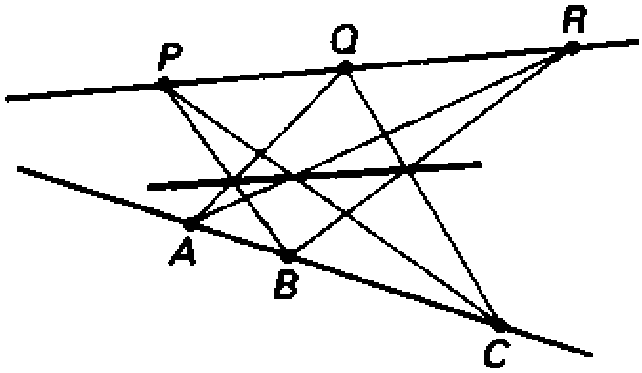
问题

1.



这是一个不同的圆内接四边形.它关于圆心对称，这意味着图中所引的对角线通过圆心.在这个特例中关于角 P 和 Q 可以做出什么推断？

2.

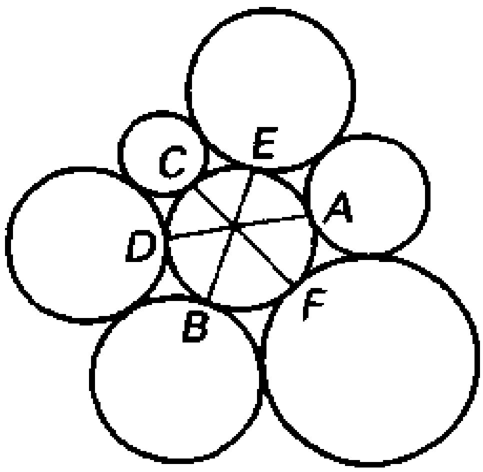


第7章问题3的帕普斯(Pappus)定理，从一对直线入

手.圆锥截线包括抛物线,双曲线,椭圆和圆(它是椭圆的特例),作为特例,也包括一对直线.

这很有启发性.如果一开始6个点就被选在任意圆锥截线上,帕普斯定理还成立吗?

3.



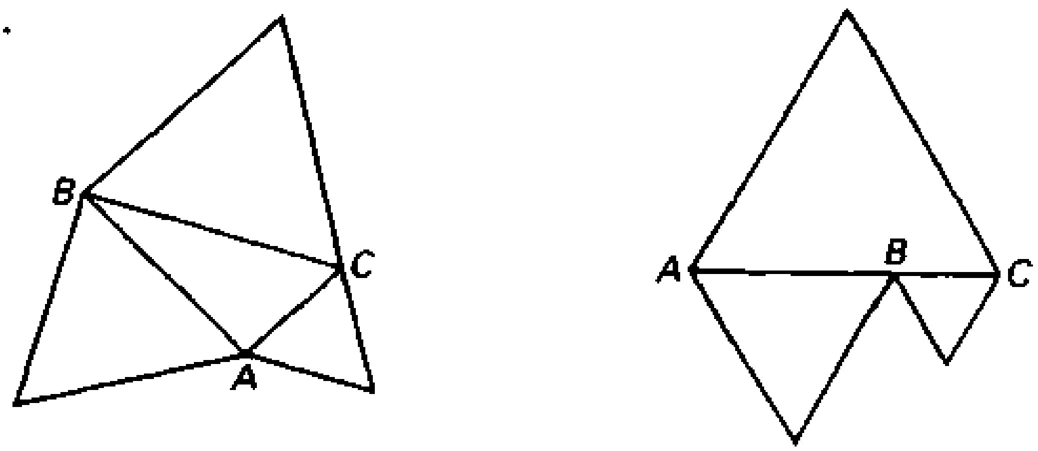
这个图解释了七圆定理.六个圆,每个都与两侧的圆相切并与内圆相切于 A,B,C,D,E 和 F 点.定理说线段 AD,BE 和 CF 交于一点.

想象一下,在外面的圆链中,三个相间的圆越变越大……,大到成为直线,而为了给它们更多地方,外面剩下来的圆就变得稍小些.这七个圆仍然像以前那样彼此相切.

结果是什么样的图?什么定理?

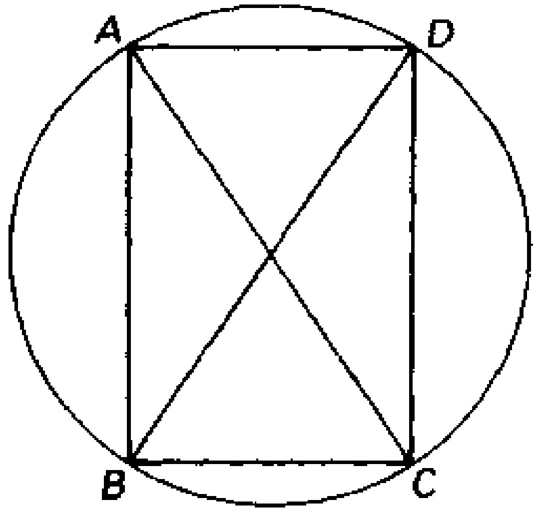
[65]

4.



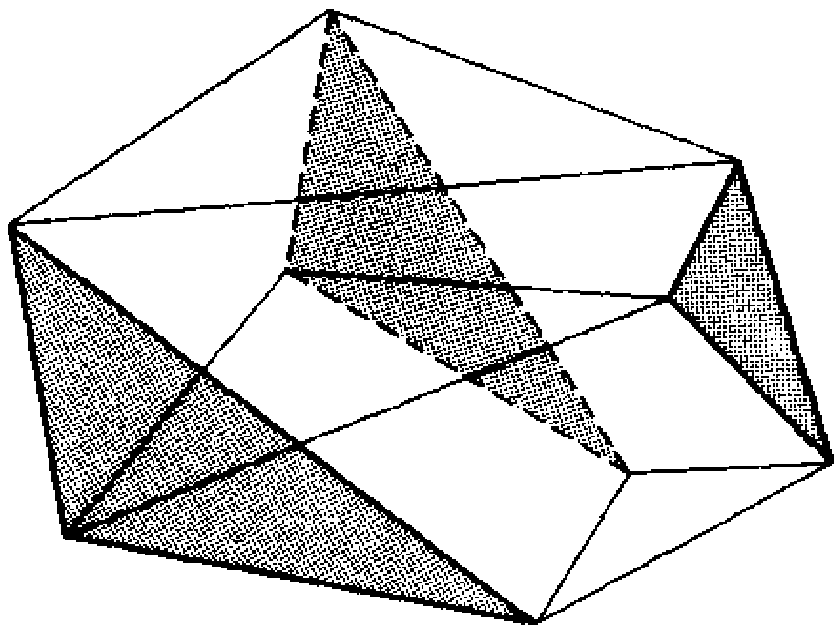
在第6章中讨论过的拿破仑定理说这三个等边三角形的中心形成第四个等边三角形.如果原先的三角形 ABC 退化为一条线段,如图所示,有什么结论?

5.



四边形的两个顶点移至重合时,托勒密定理并不产生有趣的结果.如果它们简单地组成矩形的顶点,如图所示,有什么结论?

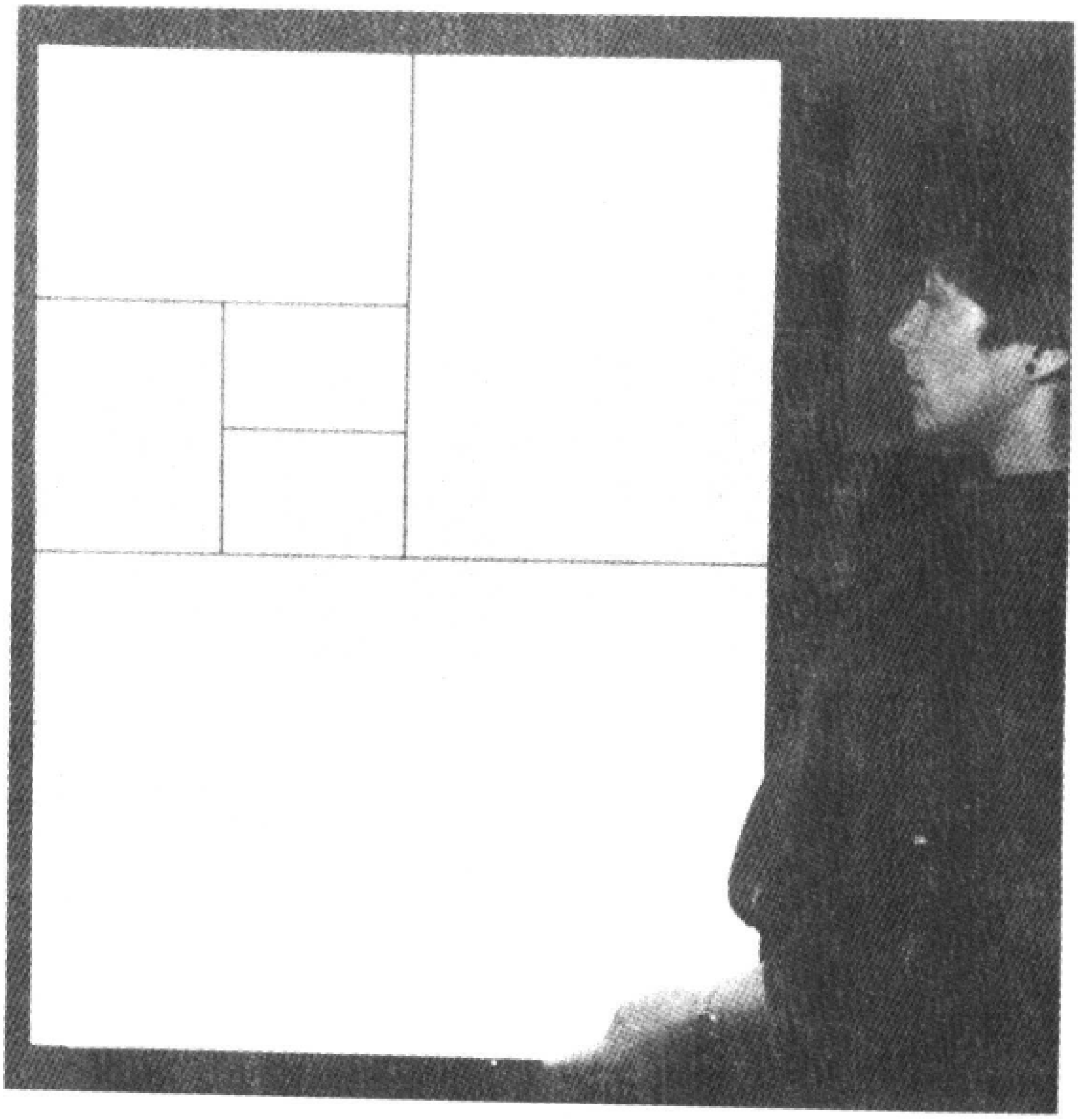
6.



这个图是这样构造出来的，先画两个有阴影的三角形①，以它们对应顶点的连线为底分别作三个相似三角形.于是，这三个三角形的第三个顶点自动形成第三个三角形，它与原先的有阴影的三角形相似.问题是，当三个没有阴影的相似三角形退化成线段时，有什么结论？ [66]

① 这两个三角形应当是相似的.——译者注

第9章 求　　和



1张卡片 $A1$ 分成 $A2, A3, A4, A5$ 和 $A6$ 各种尺寸.

有没有可能把一串无限延伸下去的数加起来？有时答案是明显的“不能”：

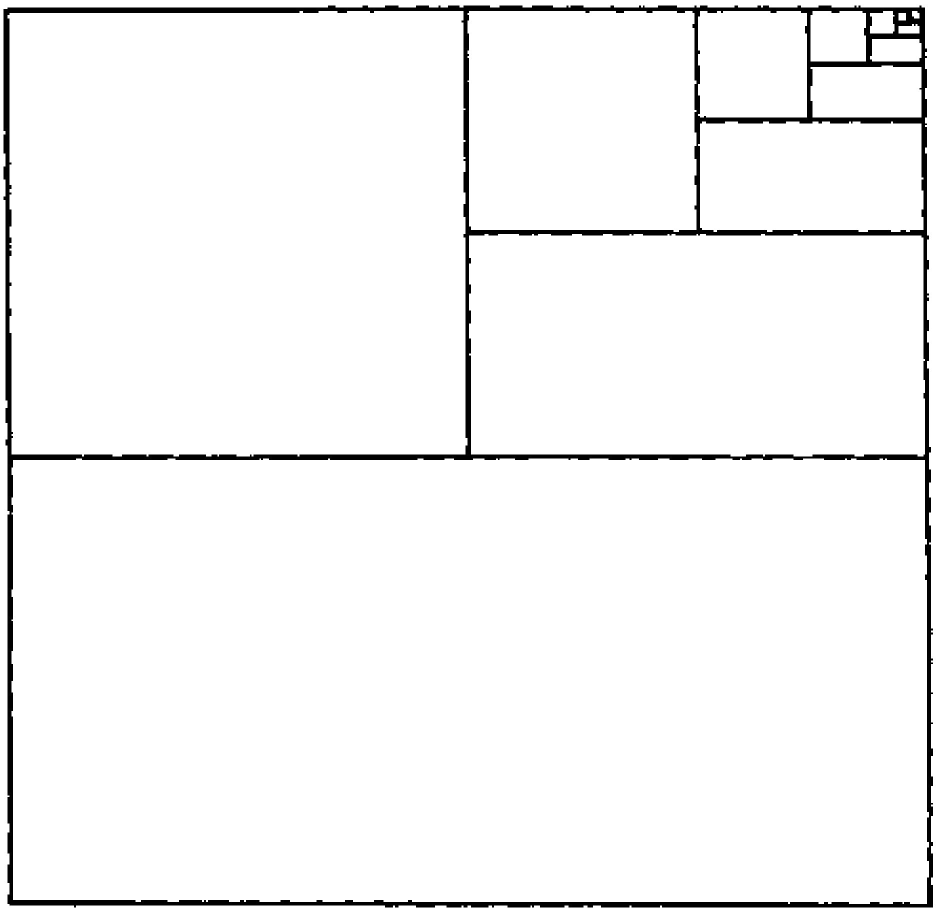
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+\cdots$$

这些数越来越大，看不到尽头，和也是如此．如果数越来越小的话，也许求和会显得较为合理：

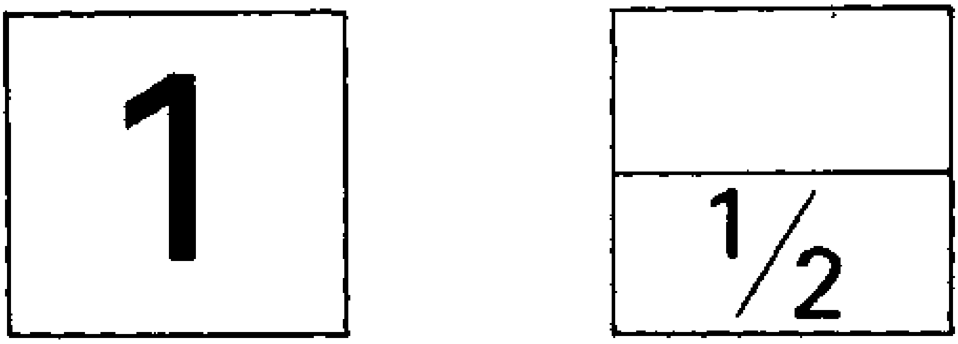
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots.$$

这有差别吗？有的，我们可以把和换成一个图，这个图将使差别非常清楚．

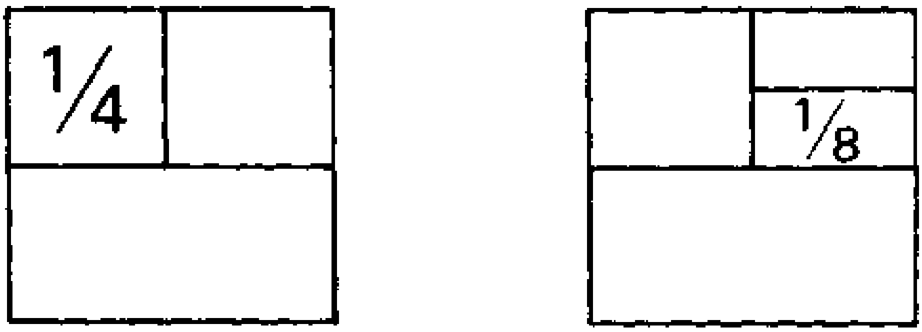
[67]

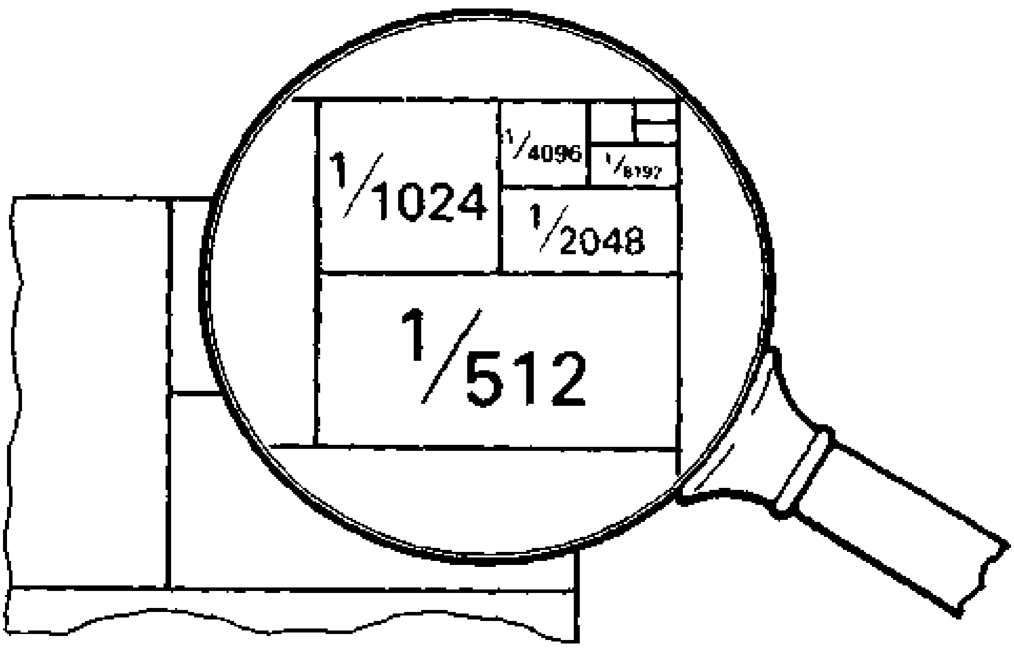


这个正方形是怎样构造出来的？我们从一个空正方形开始，它表示1．然后我们填上一半，留下另一半是空的．



下一步，空的一半再分成两个四分之一，把其中一个填上．然后空的四分之一再分成两个八分之一，把其中之一填上……如此下去．





这个过程能够永远进行下去……永远……永远.当然,得有一点儿想象力.

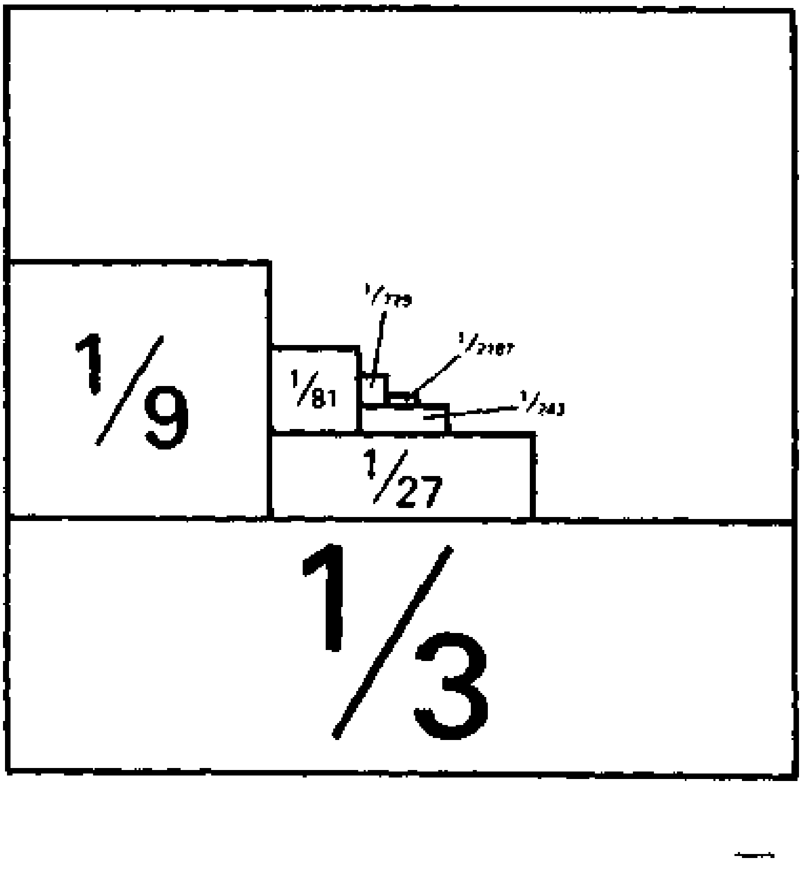
然而,想象和无穷在数学中可能是不可靠的,甚至是危险的组合.因此,在这个例子里,数学家研究了不用无穷的概念,把注意力集中在图的两个特征上去处理. [68]

首先,不管你把多少片填进正方形里,你决不能完全填上,因此,这个正方形确实不会溢出来.

其次,填进去足够多片,可以确实地越来越接近你所希望完全填成的"1"这个正方形.

这两个条件足以让数学家们相信,他们确切地知道,不依赖于他们凝望一个没有尽头的"无穷"远处的想象,把一串无穷的数加起来是什么意思!

这串数是一个十分简单的范例;第一个数是$\frac{1}{2}$,后面的每一个数是前一个数的一半.



下一个级数是类似的，但稍复杂一点：它以$\frac{1}{3}$开始，后面的每一个数是前一个数的$\frac{1}{3}$：

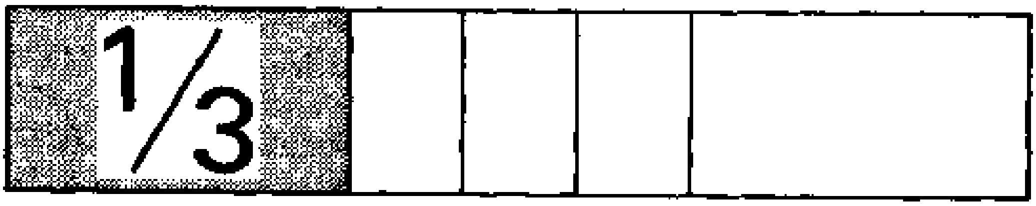
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\cdots.$$

能不能用填正方形的相同方法求它的和呢？

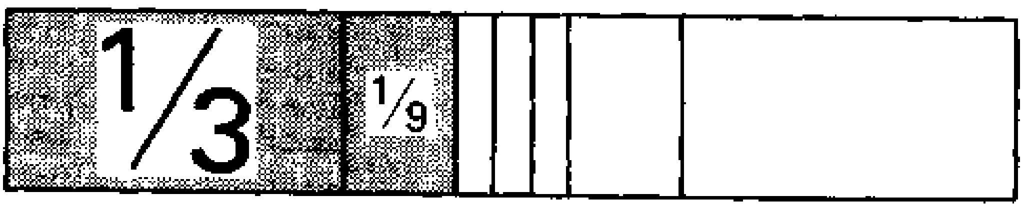
这是一个尝试，但是结果远没有我们的前一个那么简单，那[69]么优雅.



然而，有另一个图，可以做这件事. 开始时画一个长条，再把它三等分.



把第一个$\frac{1}{3}$涂上阴影，再把下一个$\frac{1}{3}$分成三个$\frac{1}{9}$.



接下来，把第一个$\frac{1}{9}$涂上阴影，再把下一个$\frac{1}{9}$分成三个$\frac{1}{27}$.

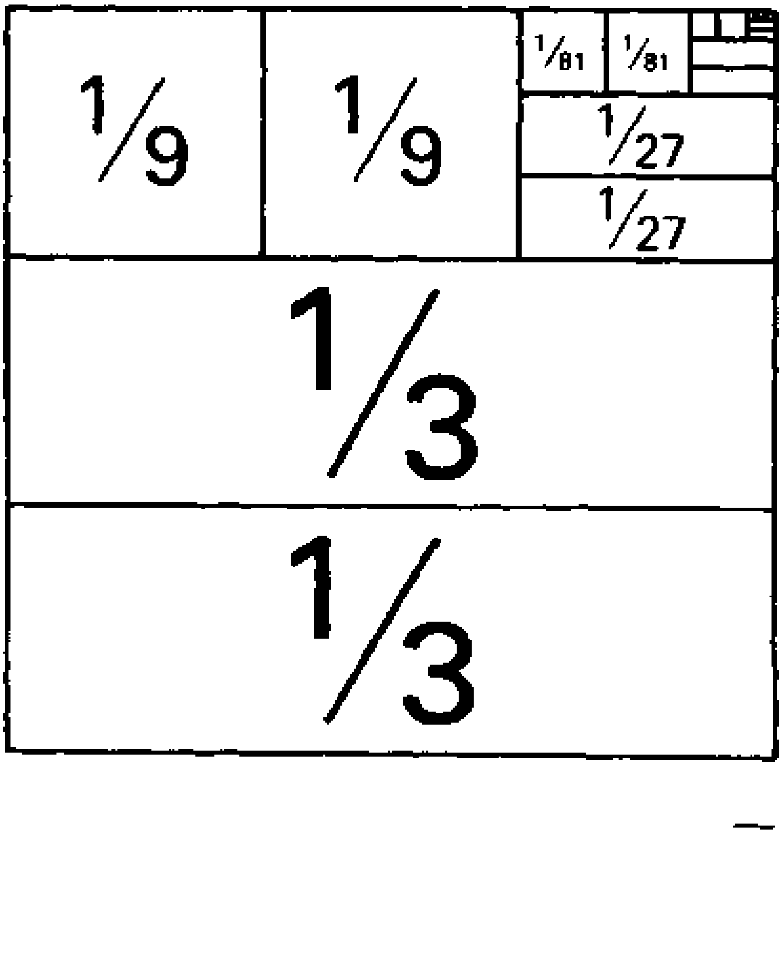


然后，把第一个$\frac{1}{27}$涂上阴影，再把中间的$\frac{1}{27}$分成三个$\frac{1}{81}$.

如此下去！每一步都更趋近于一半的标记.事实上，我们可以让它要多接近就多接近一半；而决不会超过它，不管我们取了许多步，因为我们总是先把左边一片涂上阴影，这一片在长条中点稍稍靠左边一点.这一次，数学家们满意地说这串无限长的数的和是$\frac{1}{2}$.

到此一切顺利，但是还有一点儿令人失望的是不同的问题必须用不同的图.是不是需要第三种新图求这个级数的和？

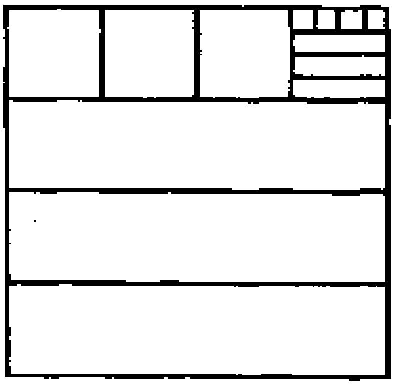
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}+\cdots.$$

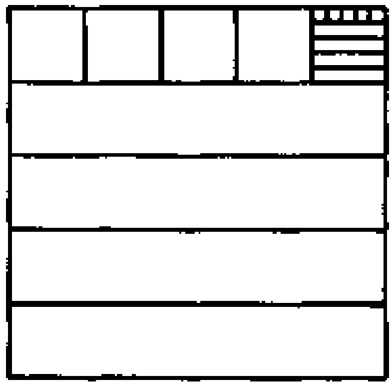


有没有一般的范例,每一次都能用上? 有,第二个级数的求和就是很强的暗示.如果三分之一,加九分之一,加二十七分之一……和是二分之一,那么,三分之二加九分之二加二十七分之二……和应该是一,这时,确实有一个极好的机会使它们可以填满正方形"1".

[70]

它们就这么做了.上页中的图是它们做成的简单模型.





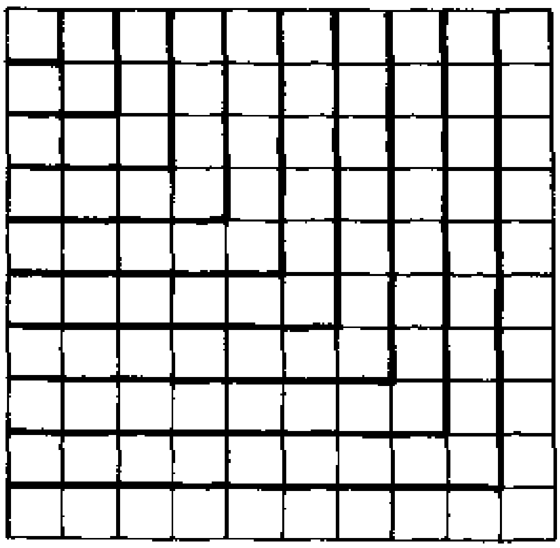
这是一个进步! 同样的范例对任一个类似的级数是有效的.

图可以被用来求许多其他种类的级数的和.用一点巧妙的心算表明下面这个级数的和数是100——一个可疑的整数:

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19.$$

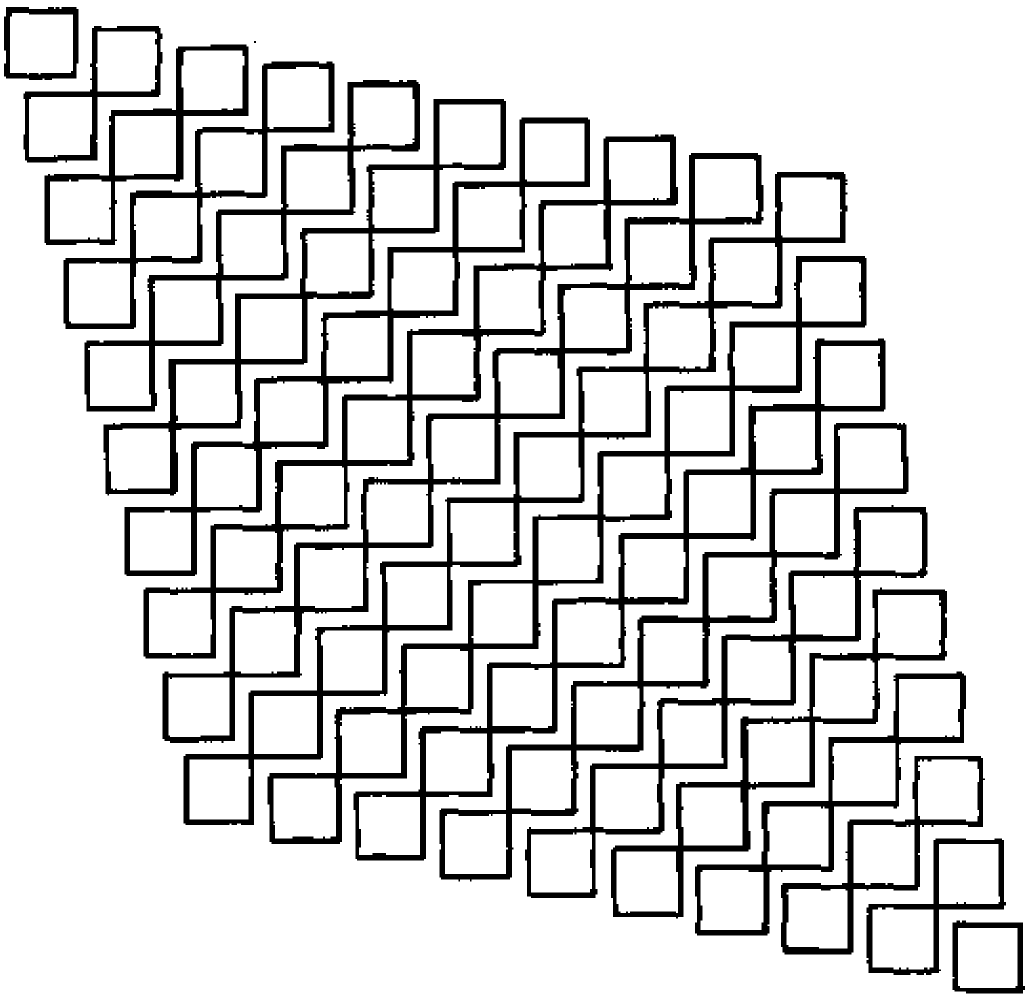
为什么? 下图提供了一个答案:

[71]



这个包含许多正方形的 10 乘 10 的正方形，被分成 L 形小块，及一个单个正方形. 把它们加起来，就得到 100.

还有别的方法来计算一个大正方形中的小正方形.



如果沿着从西南到东北的对角线来计算方块，会发生什么呢？为了按对角线计算，在这个图里相同的方块被分开了. 这产生如下的数的范例：

$$1+2+3+4+\cdots+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1.$$

如果从不同尺寸的正方形出发，我们就可以找到同一类型的不同范例. 例如想一想会发生什么，我们就可以信心十足地预言级数

$$1+2+3+4+\cdots+14+15+14+13+\cdots+3+2+1$$

的和.

我们只需要做一下计算：找出中间数，它是 15，然后自乘：$15\times15=225$.

[72] 啊！数学的力量！

问题

1. 在这个级数的下面，倒着将这个级数重写一遍．借助这一方法，快速地算出这个级数的和：

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10.$$

2. 由 93 页的图，怎样推出和 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots$ 是 $\frac{1}{2}$？
3. 怎样将 89 页的图分成两部分，以显示级数 $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots$ 的和是 $\frac{1}{3}$？
4. 不求任一个级数的和，怎样将级数

$$1+2+3+4+5+4+3+2+1$$

重新排列，或重新分组，以显示它与 $1+3+5+7+9$ 有相同的和？

5. 画一张图来表示级数 $1+8+16+24+32+40$ 的和．
6. 怎样把 89 页上的图分成一连串相似的形状以显示 $\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+$ [73] $\frac{3}{64}+\cdots$ 的和是 1？



[74]

第10章 比　喻

为什么人的老年称为生命的黄昏？希腊哲学家亚里士多德有一个美妙的数学解释.他用我们今天用的同一个希腊字称呼它——比喻,并且他解释说比喻有比例的形式:

老年比一生等同于傍晚比一天.

维多利亚时代,要求小学生弄懂算术中表示成下式的比例

$$12:8::9:6.$$



[75]

这个式子读成12比8等于9比6.现代的小学生会把同样的事实写成这样：$\frac{12}{8}=\frac{9}{6}$.

它也能反过来写成：$\frac{12}{9}=\frac{8}{6}$或12∶9∷8∶6.

因而亚里士多德的比喻可以是：老龄比傍晚等同于一生比一天.

亚里士多德称赞比喻并把好的比喻同谜语(以及笑话)相比.理解一个比喻就是解一个谜语.比喻创造出新的含义.因此比喻能用来给还没有命名的事物命名.他提供了一个有名的谜语作为例子：

我看到一个人，他把点着火的青铜器往另一个人身上贴.



在亚里士多德的希腊没有词语用来描述怎样把一个用于伤者的、加热的青铜杯贴上吸住伤处并把血拔出来，因此字"贴"被用上了，但是多成功啊！它不仅表明这杯子是牢牢地贴在胳膊上，而且也意味着要想拉开它是十分困难的.

亚里士多德继续说，这种比喻通过它们所包含的新信息使我们理解未知的东西，只要它们不是非常明显以致什么内容也没有，或者非常困难和含混以致听者完全不得要领.

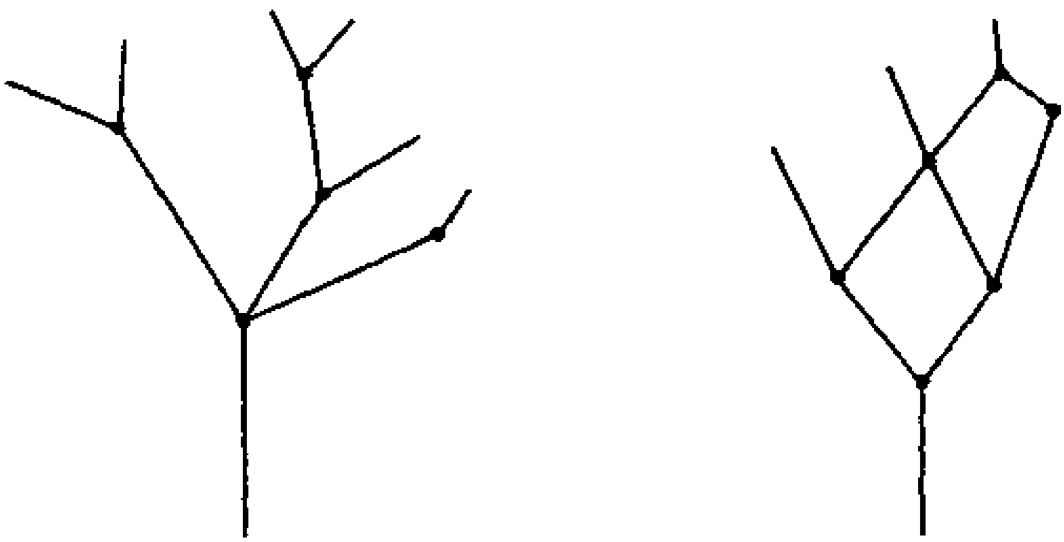
在亚里士多德后两千多年，北美印第安人用了一打以上的术语用比喻的方式给汽车部件取名字，毫无疑问，这使第一次见

到汽车的小孩更容易弄懂各个部件.前保险杠是"穴鸟",这词的另外的意思是"下巴和颚".前轮是"枪",一个意思是"手和胳膊".后轮是"ke"即脚.前灯自然是"inda"即眼睛.汽车的引擎罩是"chee"即鼻子.

他们也看汽车的内部.电线是"tsaws"即血管.水箱管是"chih"即肠子,而汽油箱当然是"pit"即胃.[76]



数学家也用比喻给无名的东西命名,指出隐藏的联系,帮助记忆,避免采用本身毫无意义的新名称.相同的比喻教新来的人把数学思想与以前的经验联系起来.



翻开一本图论书,你就会看到像上页左边那样的图形.那种图简称为树,奇怪吧!

右图不大像树,因为它的树枝不是分开而是连接和交错的.这不是树.数学家定义树是一个图,没有圈,没有环,因而一棵树,它的树枝不相连接.

数学家自然地谈论他们的树.有什么比把分支说成树枝,或者把树的起点说成根——如果它有根的话,更自然呢? 某些数学中的树没有根.好吧! 可以用各种各样的……

许多树集中在一起叫什么? 是的,你猜到了,数学家把树的集合叫作森林.数学家必须到此为止吗? 当然不.几年前在权威性的"皇家协会哲学学报"上有两篇文章,标题是"矮小树的周期性森林"和"最大树径为3的周期性森林". [77]

"树"这个字总是一个有力的比喻.我们可以谈论我们所有祖先组成的家谱树.计算机也有祖先,那是与今天的计算机有关系的早期计算机.计算机系树已经发表了,它展现了作为Markl和ENIAC的后裔的成百种计算机.计算机系树有分支,像家谱树一样.

数学家不是总能为他们的新概念找到作比喻的日常用语,但他们干得不错,如查查数学词典就有:

偏差,绝对,影响,高,基底,辫,树枝,载体,链,特征,退化,度,区域,棱,弹性,包,穷举,面,忠实的,族,纤维,域,滤子,最后,恰当的,平坦的,流,健忘的,形式,基础,框架,间隙,芽,整体的,粘住,柄,遗传,不可分,内部,区间,岛,导网,连接,联合,跳跃,核,消灭,梯子,格,层,布置,叶,升,装载,环,地图,成员,最小,模,自然,邻域,网,障碍,开,运算,被动的,垂足,束,半岛,主元,量,排队,秩,区域,正规,仿样,剩余,环,根,鞍,分离,束,切,转移,簇,骨架,松弛性,串联,容许,迹,套,

树，平凡的，脐，并，普遍的，粗的，消去，簇，网，楔，权，野的.①

上述数学比喻中的多数原文即使不是已经废弃了，实际上也正在废弃.这就是说，使用它们的专业人员并不有意识地想到它们原来的含义.

其他的一些比喻只是在必要时才用，也许只有富于想象力的教师和作者用，它们决不会成为标准术语."颜色"这个词不在上面列的表内，但常用它使问题的表述更加清晰，有时也用在问题的解答中.

有一次布鲁诺·布鲁克斯(Bruno Brooks)在无线电一台向他的听众提出这个问题："如果所有偶数是蓝色的，所有奇数是红色的，把蓝色与红色相加该是什么颜色?"颜色这词用得多么高明!

唐纳德·纽曼(Donald Newman)在一本书里给大学生提出这个问题："平面上的各点被涂上红、黄或蓝色.证明存在两个颜色相同的点，它们相距一个单位."如果纽曼想完全按照惯例，他可以这么开始："平面上的点被分成互不相交的三个集……"多么乏味!

用"骨架"这个词表示"结构"是一个比喻.它被选来沟通通

① 相应的英文单词分别为：aberration absolute affect altitude base box braid branch carrier chain character degenerate degree domain edge elastic envelope exhaustion face faithful family fibre field filter final fitting flat flow forgetful form foundation frame gap germ global gluing handle hereditary inseparable interior interval island jet join joint jump kernel killing ladder lattice layer layout leaf lift loading loop map member minor model natural neighbourhood net obstruction open operator passive pedal pencil peninsula pivot quality queue rank region regular replica residue ring root saddle separation sheaf shear shift sieve skeleton slackness tandem tolerance tooth trace trap tree trivial umbilical union universal vague vanishing variety web wedge weight wild

常理解的结构思想(支撑身体的骨骼,现代摩天大楼的混凝土支柱中的钢筋)与远为抽象的数学思想.墙纸模式常常用来解释骨架与结构的两方面的含义.

正是"同构的"和"比喻"这两个词可以被解释为同构的,互相成比喻的,倘若比喻按亚里士多德的意义被解释为比例的话.[78]

×	$+P$	$-P$
$+Q$	$+PQ$	$-PQ$
$-Q$	$-PQ$	$+PQ$

+	偶数	奇数
偶数	偶数	奇数
奇数	奇数	偶数

当数学家说这两个结构是同构的,含义就是在它们之间有一个比例关系.这个关系能用这种说法来描述,"偶数比正数等同于奇数比负数等同于加法比乘法".取(至少)两个比例来描述这个关系说明它的复杂性,这种复杂性在数学中非常容易出现.

类似的复杂性出现在谚语里,譬如"滚石不生苔,转行不成材".实际上,听者必须懂得"石头比人等同于滚动比不断地移动等同于苔藓比(说话的人或上下文提供的任何内容)".

没有上下文,"苔藓"的解释是十分含糊的,这在文学作品和日常生活中是典型的.正如亚里士多德建议的那样,日常语言和文艺,使用比喻和其他修辞手段,创造新的含义,去教人,去交流(并不总是成功的).藏在下面的结构仅是达到目的的一种手段.

数学家被藏在下面的结构本身强烈地吸引住.为了把结构看得更清楚,他们常常摆脱原先的内容.给一张墙纸,一块地毯或者一段窗帘布,数学家会透过花、螺纹、装饰图案,看出隐藏的模式.

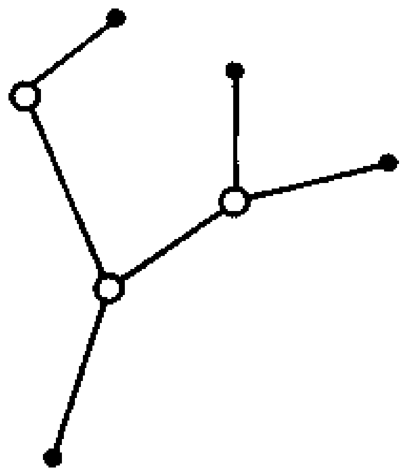
当日常的线索被剥去时,数学常常显得与生活无关,这是不

足为奇的.同样不足为奇的是由于这些结构和隐藏的联系随处可见,同一个抽象数学后来能用许多不同方法充实它的含义,就[79]像在骨架上构筑雕像一样.

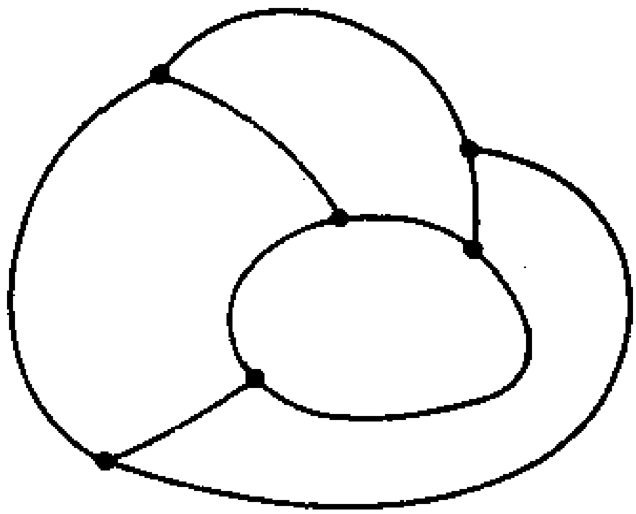
问题

1. "两个数的积比其中一数,等同于矩形面积比它的边长."对不对?

2.

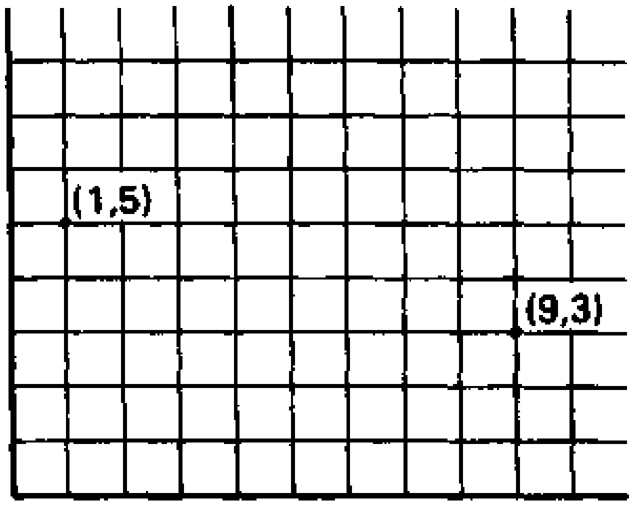


"规则'端点数加分支点数等于边数加1'比树,等同于欧拉关系'顶点数加区域数等于边数加2'比平面图."对不对?



3. 数对，如(1,5)与(9,3)，可以相加，方法是把它们的两部分分开简单地相加，如：(1,5)+(9,3)=(1+9,5+3)=(10,8).

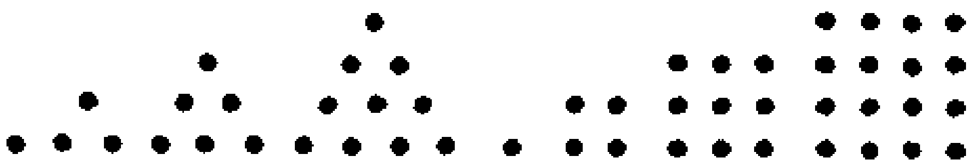
数对也可以表示在图上：

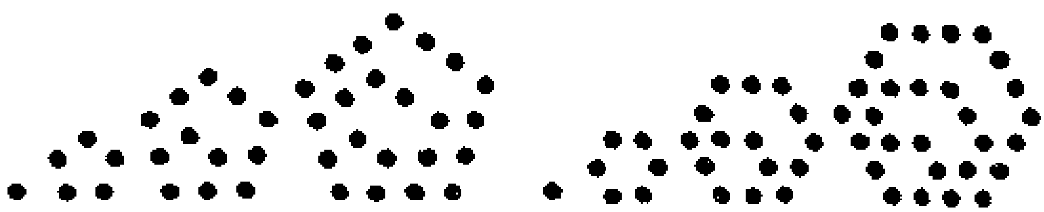


在这个图上，数对的两部分分开相加的加法，几何上与什么等价？

[80]

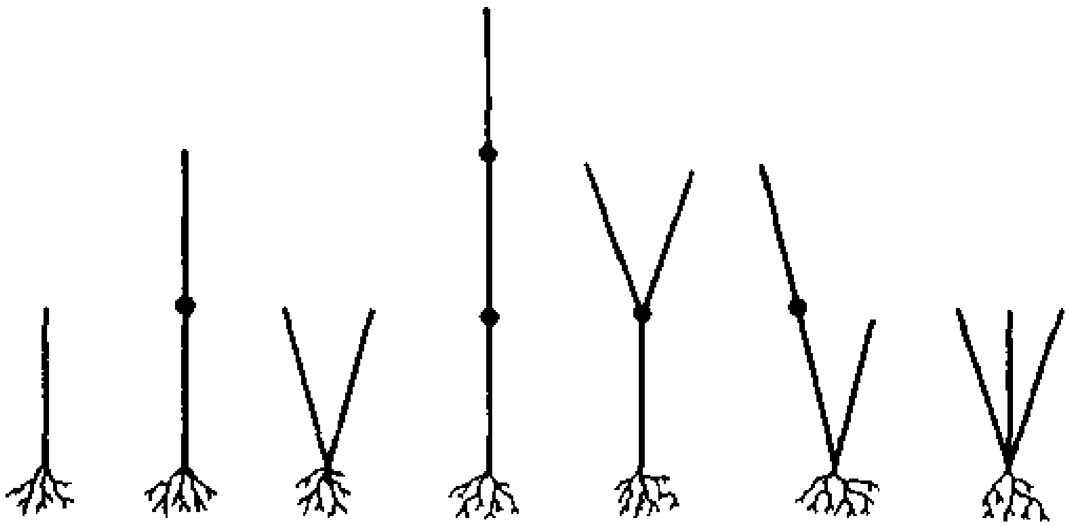
4. 第 n 个三角形数的公式是 $\frac{1}{2}n(n+1)$. 第 n 个平方数当然是 n^2，第 n 个五边形数的公式是 $\frac{1}{2}(3n^2-n)$.



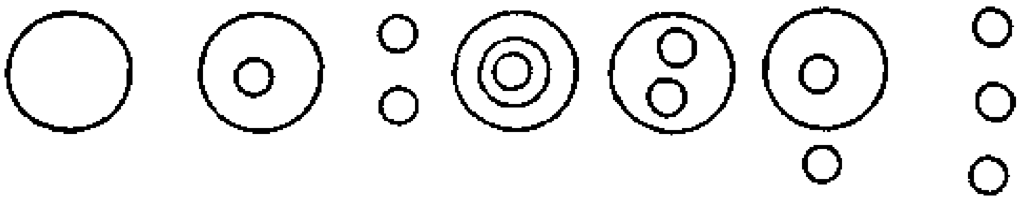


完成比例关系:"$\frac{1}{2}n(n+1)$比三角形数,等同于 n^2 比平方数,等同于$\frac{1}{2}(3n^2-n)$比五边形数,等同于……比六边形数."

5. 毫不足怪,有根的树是一棵树,有一个端点作为根.如下面这些是分别有1,2和3条边的树.

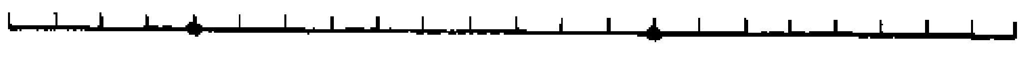


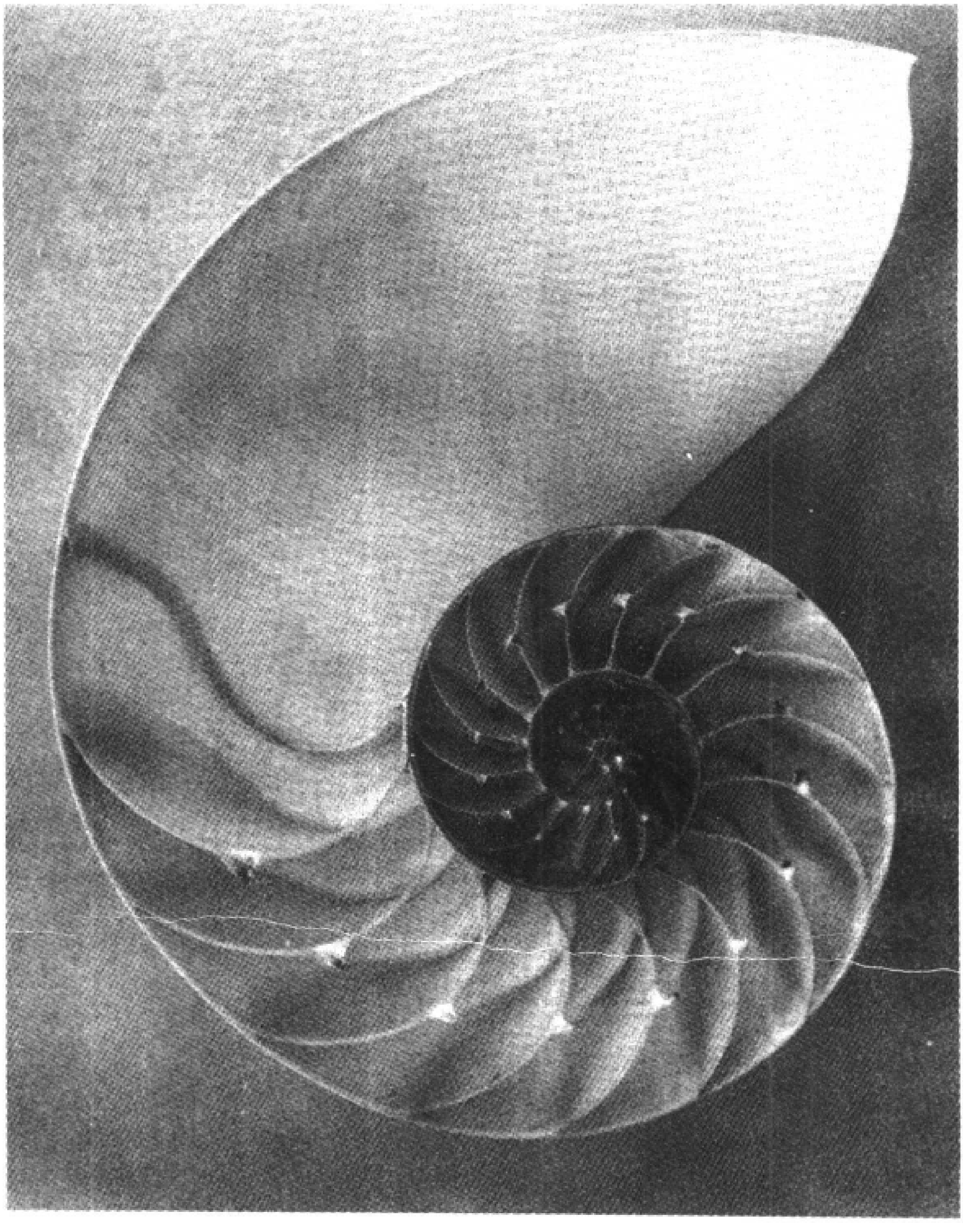
怎样把有1,2,3,4,…条边的不同的有根的树的个数,与如图所示的肥皂泡的排列数相比较?



6. 完成这个比例关系:"两个数的平均值比这两个数等同于……比这两个数在刻度尺或坐标轴上的位置."

[81]

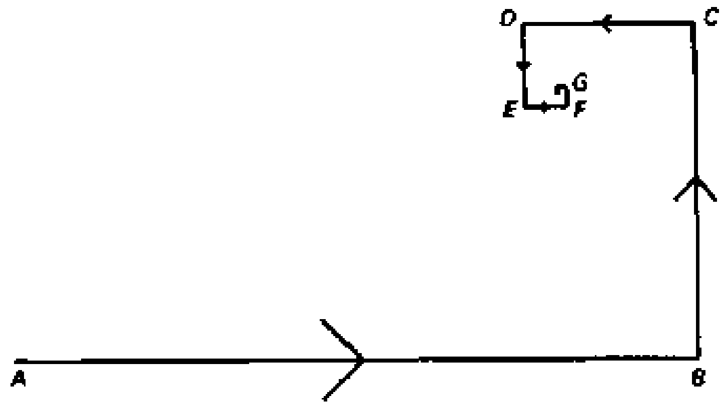




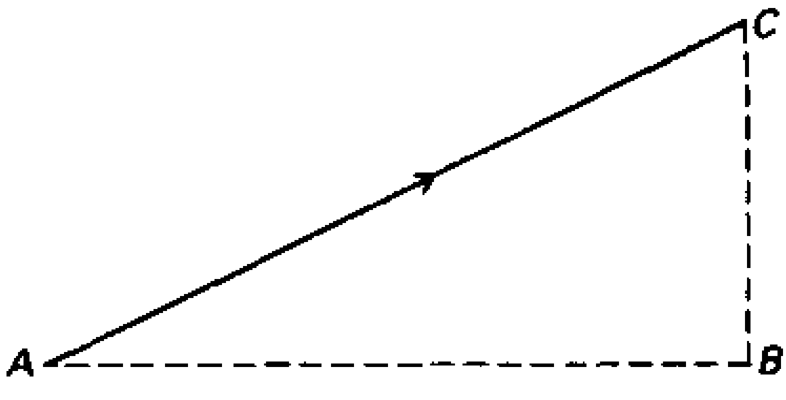
鹦鹉螺贝壳断面图

[82]

第11章 一题多解

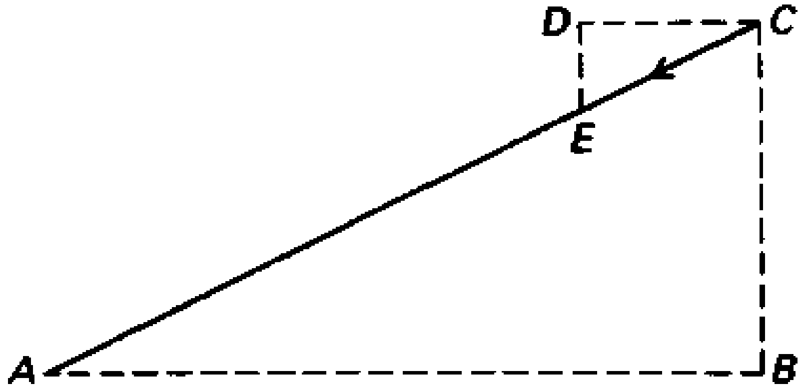


我们可以把这条螺线想象为一只甲虫的爬行路径，它越来越频繁地向左转．直观上看，这甲虫似乎要去某个地方，它正爬向某个中心，很自然地，我们称这点为螺线的极限，或极限点．按照第9章的例子，我们寻找一个点，螺线越来越靠近这个点，事实上，我们能让它要多接近就多接近这个点．



可以由多种途径找到这个螺线的极限点，这依赖于我们怎样去“看”这条螺线．例如，把前两次运动合在一起，即用一个直线运动来代替．

现在来看下两次运动，仍用直线代替它们．



[83]

将两次运动看作一个，整个运动就大大地简化了．成为在同一个对角线方向上简单地爬来爬去．这个对角线运动的总和是什么？将从 A 到 C 的第一个运动作为 1 个长度单位．往回爬的运动是这个单位的$\frac{1}{4}$，再下一个运动向前是前一个的$\frac{1}{4}$，如此下去……

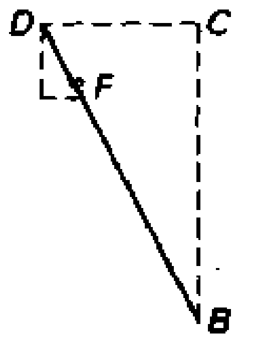
把 AC 算作 1 个单位，沿对角线的整个运动是：

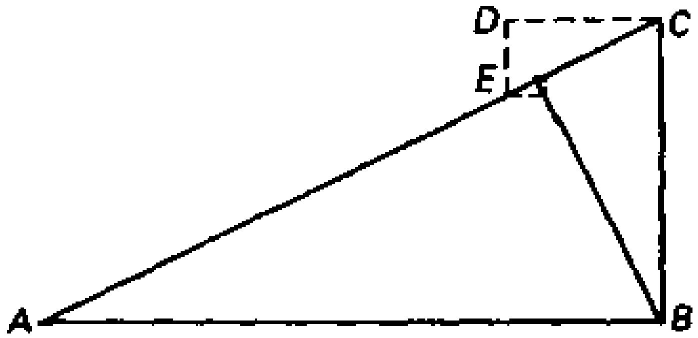
$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots.$$

用第 9 章方法可以得出这个无穷级数的和数，结果是$\frac{4}{5}$．所以这条螺线的极限点显然在从 A 到 C 的路程的$\frac{4}{5}$处．

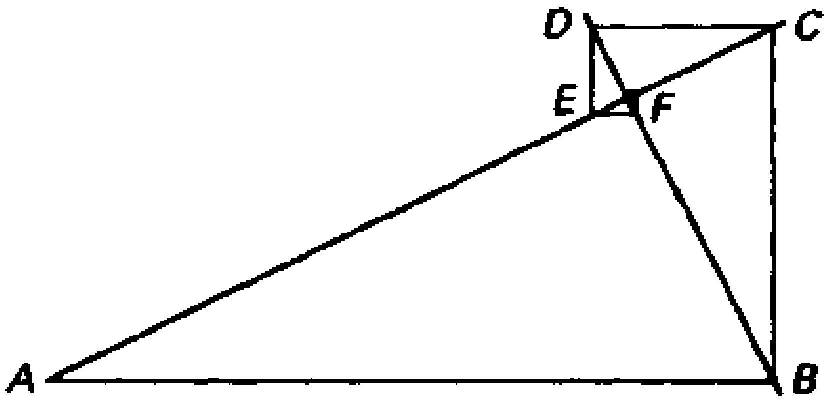
假如我们不满足于用这种几何和算术相混合的方法求极限点，而是希望仅用几何方法去求．这也可以做到．已经清楚极限点就在直线 AC 上的某处．假定甲虫从 B 点而不是 A 点开始它的行程，极限点完全不变．如果将从 B 点开始的运动成对地考虑，第一个运动直接从 B 到 D，然后经过完全相同的讨论，我们

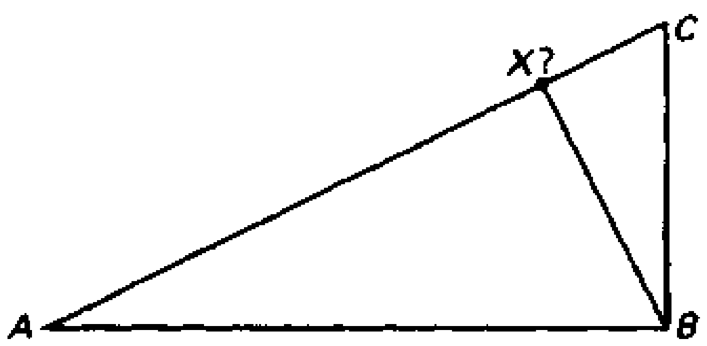
得出极限点在直线 BD 上.

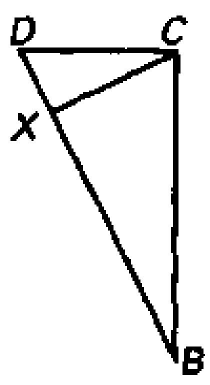




或者假定螺线从 C 点开始.极限点不动,并且我们看到它必在 CE 上的某处,CE 是我们第一次构造的线中的一段.因此,我们可以得出,直线 AC,BD,CE,等等,都通过同一点,它必定是极限点.实际作图并连接这些点从实验方面证实确实是这样的.





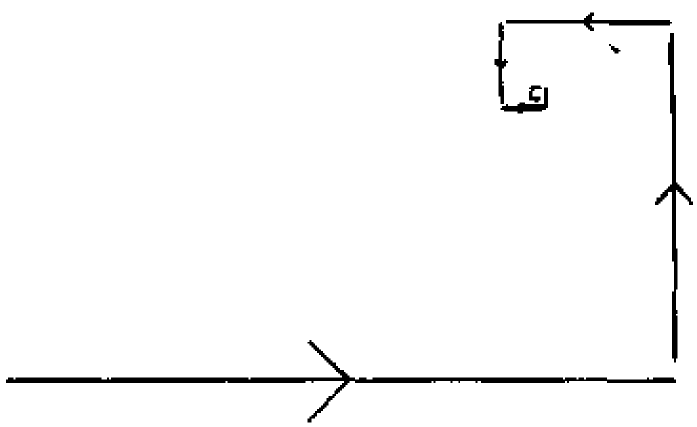


还有另外一种方法从几何上考虑螺线.想象极限点是已知的,把它标出来并把它与 A,B 和 C 点相连接. [84]

现在把右图看成是在左图的极限点上扎上一根针,再让整个图转过一个直角,并将大小减半所得的结果.AB 自然变成了 BC,BC 变成 CD.

各个三角形怎么样呢?每个三角形的大小是前一个三角形的一半,并且转过一个直角.于是这样来求极限点:求一点 X,使三角形 AXB 相似于三角形 BXC.最后的问题可以仅用几何方法加以解决.(事实上,由于$\angle ABC$ 是直角,X 是 B 到 AC 边的垂线的垂足.)

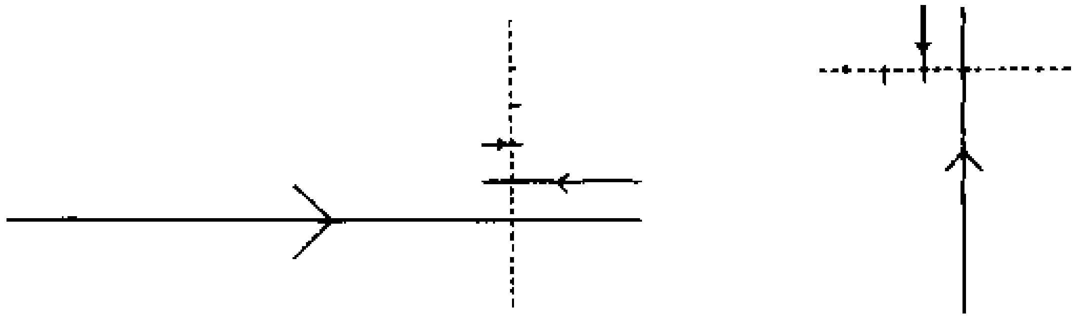
然而,几何方法可能不合你的意.也许你更喜欢用算术方法解决问题?这也是可能的.我们回到原先的图,并分别考虑水平运动和竖直运动.



这些水平运动是向右 1 个单位,再退向左$\frac{1}{4}$个单位,向右$\frac{1}{16}$个单位,如此继续下去.

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots.$$

这是一个已经求过和的级数.它的极限是$\frac{4}{5}$.



[85]

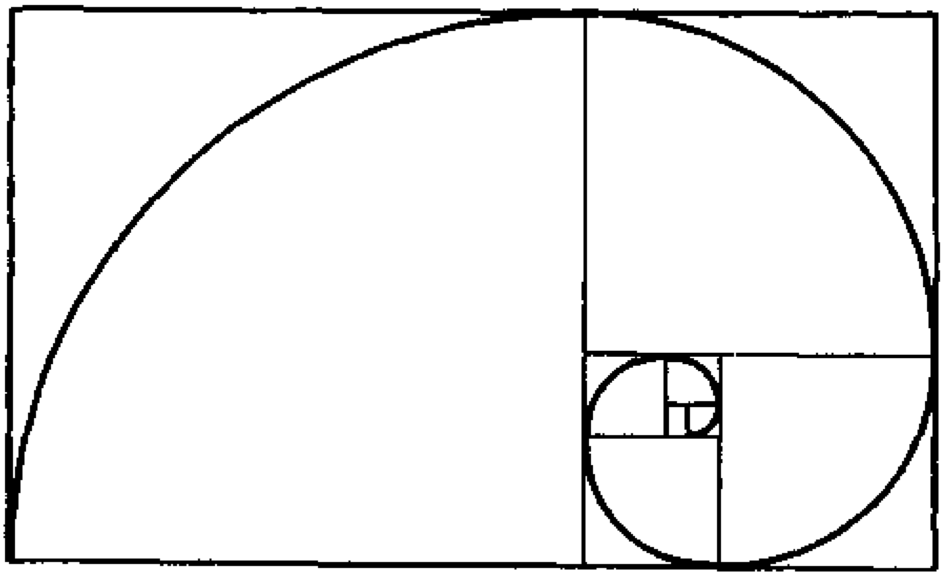
竖直运动怎么样呢？它们是

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{32}-\frac{1}{128}+\cdots.$$

这个级数的每一项正好是前面那个级数的对应项的一半，因此，这个级数的极限只能是$\frac{2}{5}$.

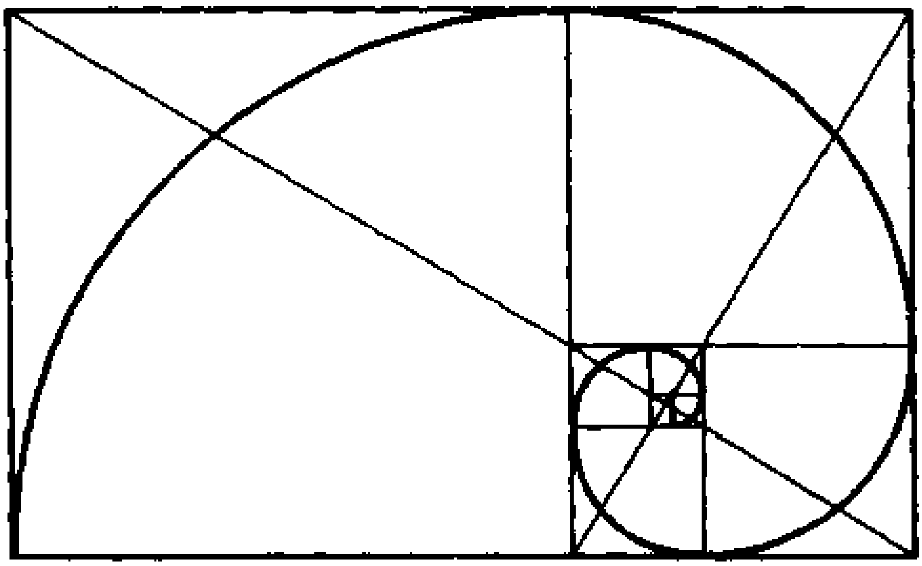
把这两个级数重新放在一起，得出极限点是向右$\frac{4}{5}$，向上$\frac{2}{5}$.

许多其他的螺线可以用同样方法去研究．这章卷首的插图是一个鹦鹉螺贝壳，它的螺线与斐波那契数有关．鹦鹉螺线的一个好的近似可以按照下图画成．



最初的矩形差不多恰好是 1×1.618 单位.这个矩形是特殊的,因为从它的一端切去一个正方形,留下来的矩形与最初的矩形形状相同.于是,可以再切下另一个正方形……,依此类推.

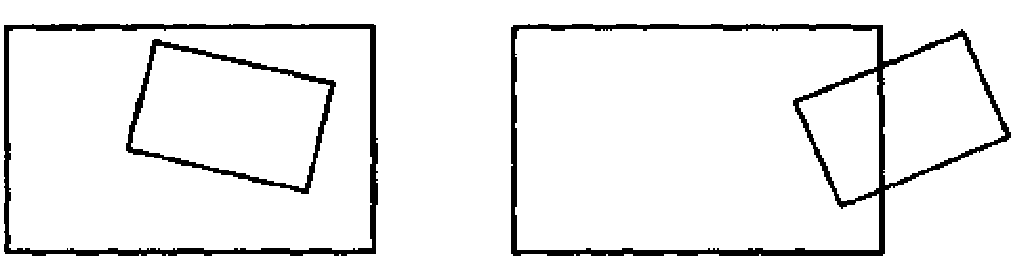
现在用圆规在每一个正方形内画$\frac{1}{4}$的圆.组成的螺线是不完全的,但它是鹦鹉螺线的一个好的近似.它的中心在哪里?极限点在哪里?



如图连接正方形螺线的顶点,这些连线全都通过螺线中心.[86]

问题

下面的问题都与这个问题有关:

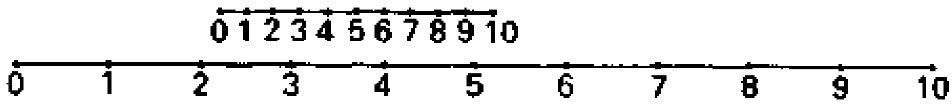


“两张相同的地图,只是比例尺不同.把一张放在另一张上面,如图所示.在大地图上存在一点,它就在小地图的对应

点的正上方.这件事必定是真的吗?

下面的论证中哪一个是正确的?

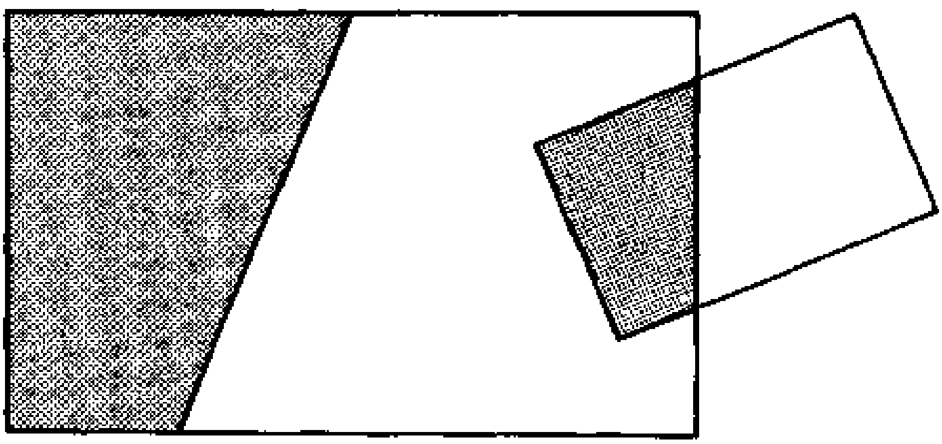
1. 在每一张地图上各盖一张方格纸,单位方格的大小与每张地图的比例尺成比例.两张方格纸上的直线完全相同地标上数,这样每张地图上的每个点都有两个坐标.然后你可以找到那个在每张地图上的坐标相同的点.
2. 对一维情形,跟普通的刻度尺一样,在每条线段上标上数.显然,一定存在一个点,标有相同的数.因为短的线段右端所标的数比长的线段上对应点所标的数字大,而它的左端所标的数比对应点所标的数小.



由于两条线段上的数是连续变化的,显然,在中间某个点上它们将相等.

同样的讨论可以应用到二维的情形.

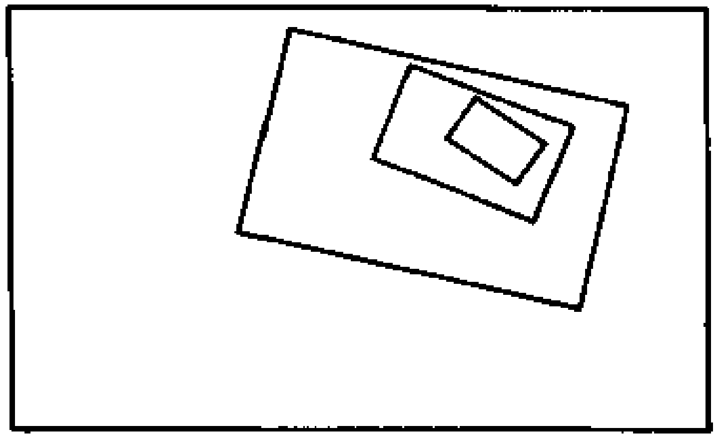
3. 不一定有一对相合的点.因为两张地图可以不充分重叠,如下图所示.



任一相合的点必须在小地图的阴影区域内,而它与大地

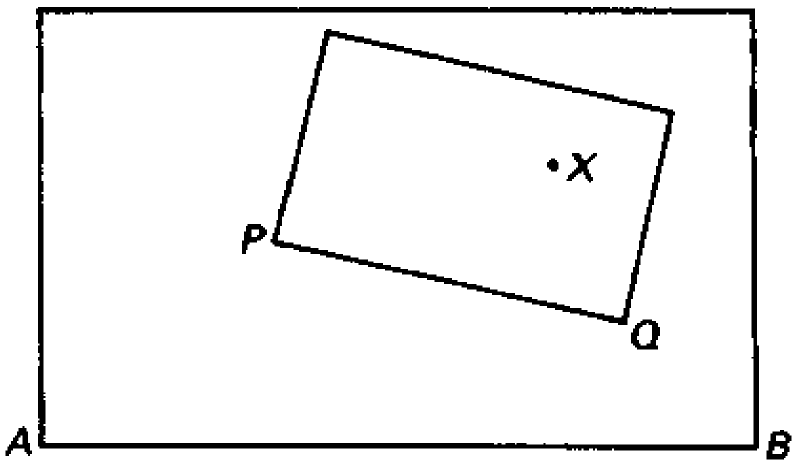
图的阴影区域相对应，两者完全不重叠. [87]

4.



设想有比例尺更小的第三张地图，将它放在小地图上面，放的位置与小地图放在大地图上面完全一样……，这个过程不断重复. 那么，最初的两张地图相合的点在所有较小的地图上也都相合. 当地图变得越来越小时，它们将趋于一个点，这个点就是极限点.

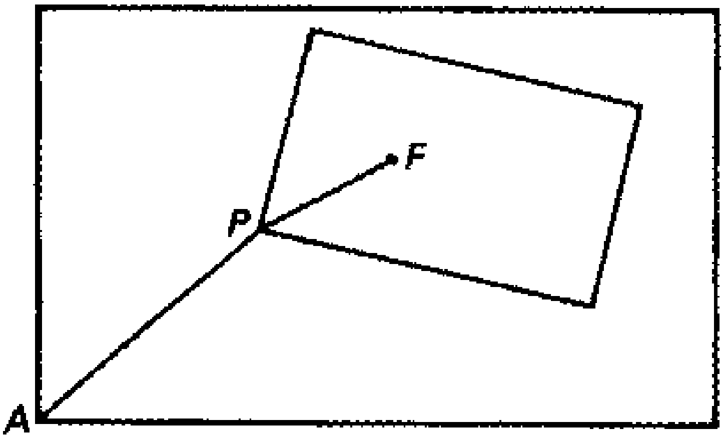
5.



公共点，如果它果真存在的话，应与小地图的顶点及大地图同样的顶点有个同样的关系. 所以问题就简化为：作点 X，使三角形 AXB 与三角形 PXQ 相似. X 点就是所求的点.

6. 公共点，如果存在的话，应与直线 AP、PF 有相同的关系，这

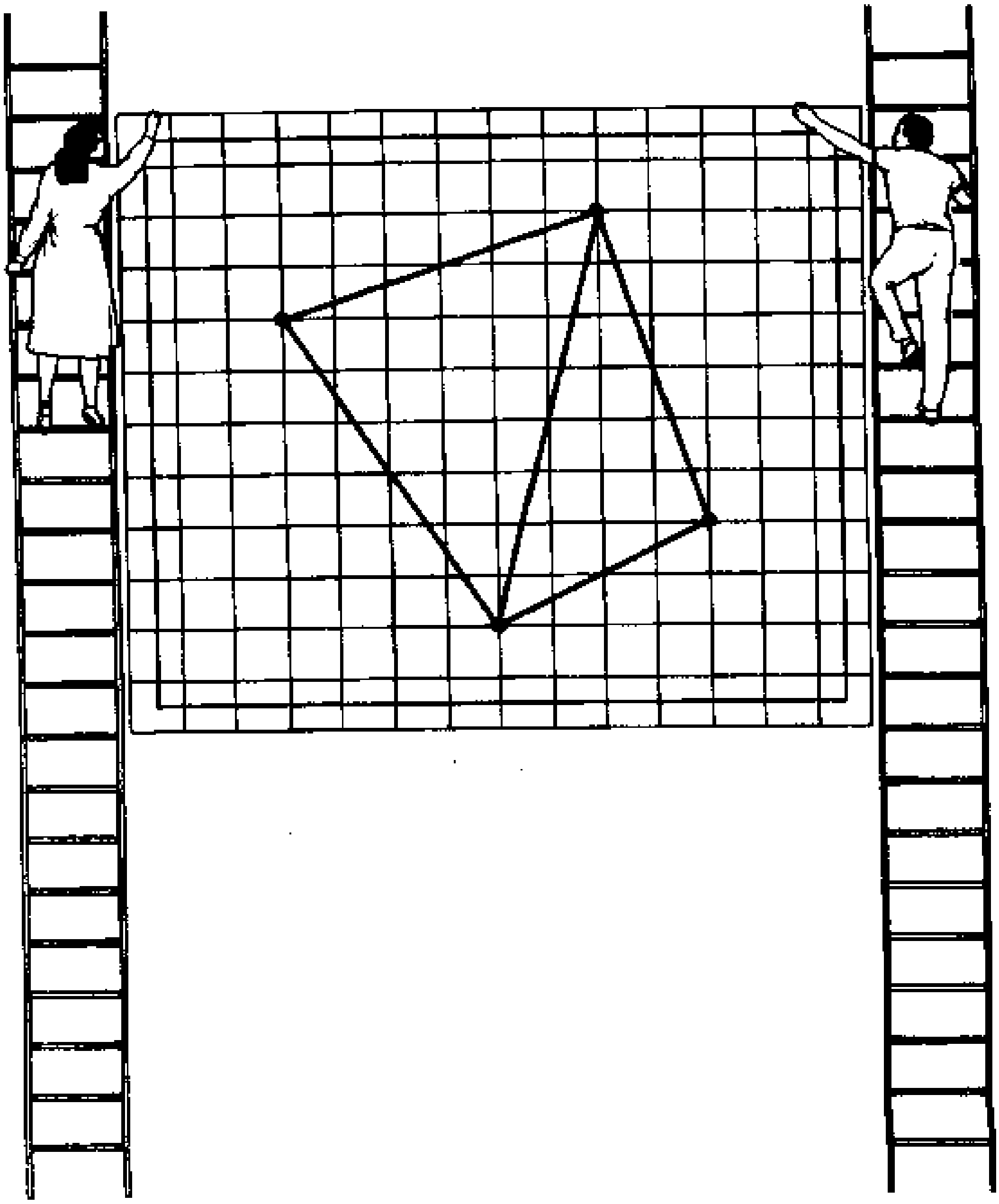
里 *AP* 是大地图的一部分，而 *PF* 是在小地图上画的与 *AP* 对应的直线.



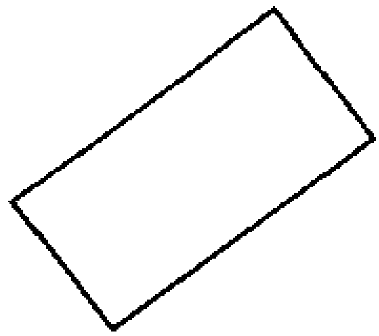
但线段 *AP* 与 *PF* 是一条螺线的起始部分，这螺线趋于一个极限点，这极限点将是两张地图的公共点.

[88] 所以只需要求出这条螺线的极限点即可.

第12章 图变成数



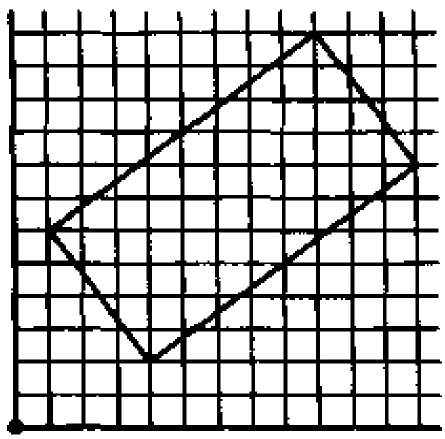
[89]



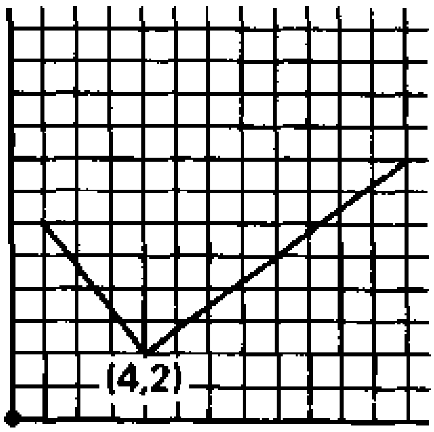
这个矩形是用一组正方形画出来的，确保它的角全是直角．这一个特征就充分保证它的确是一个矩形而不是什么别的图形．

然而，矩形还有许多其他性质．例如，它们的对边总是相等且平行，它们的两条对角线也相等，并且对角线的交点到每个顶点的距离都相等．

这些事实可以用几何来证，这种几何可见于欧几里得的两千年前的教科书(称为“原本”)．然而，说来令人惊奇，它们也可以通过先把矩形译成数——或更确切地说是一对数——来证明．事实上，任何关于几何图形的距离、角、面积的陈述完全都能翻译成关于数的陈述．在传统几何与数对的性质之间存在一种完全的同构，或者说一种比喻，只要作翻译用的“字典”能被读懂就行．

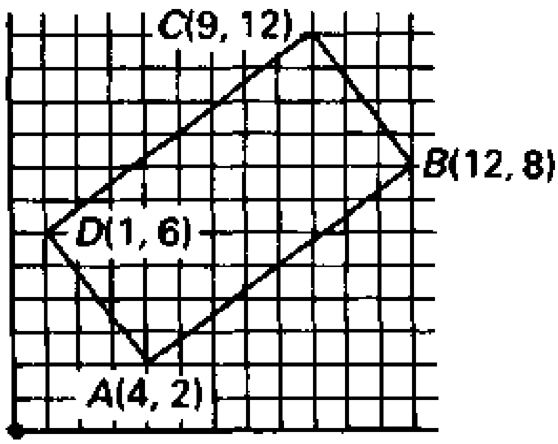


第一步是把一张方格纸放在我们希望加以研究的几何图形上面，就像经线与纬线的网盖住地图一样．正如经纬网给地图的每一点一个地理坐标，现在矩形的每一点也可以由一对数来描述．简单地从打上黑点的地方开始，这点称为原点，然后向右数，向上数，一直数到被描述的点为止．

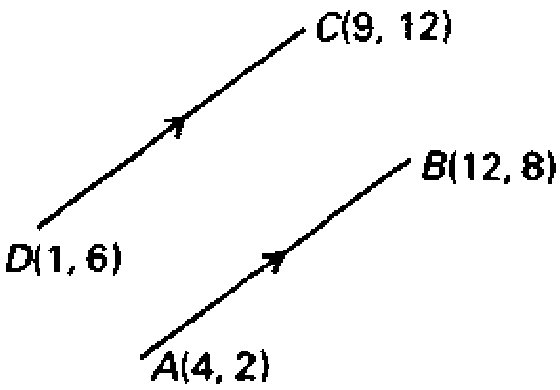


[90]

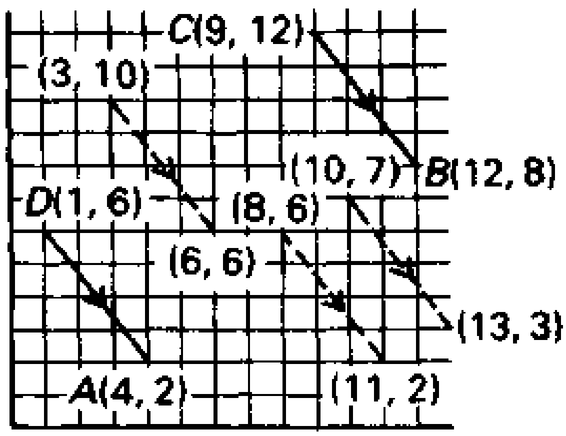
矩形的左下角离原点 4 右 2 上，它就被写成点(4,2)．其余三个角如下图所示：



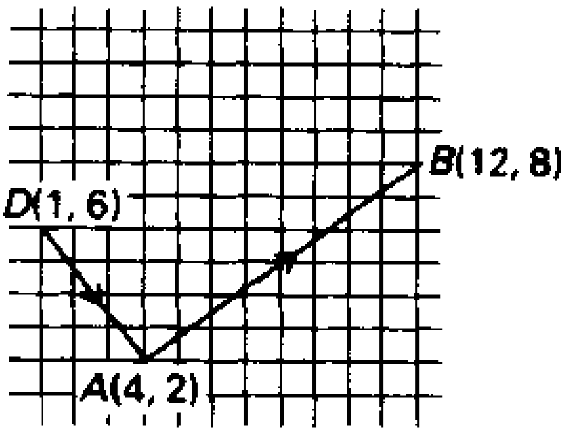
现在我们可以开始往字典里填写了，这字典把每一个几何性质翻译成数的性质，并且立刻显示出这个方法是多么强有力．在几何图形中，边 AB 与 DC 相等，并且互相平行．



这两个事实可以放在一起用这样的说法来描述:从点 $A(4,2)$到点 $B(12,8)$是 8 右 6 上,而从点 D 到点 C 也是 8 右 6 上.



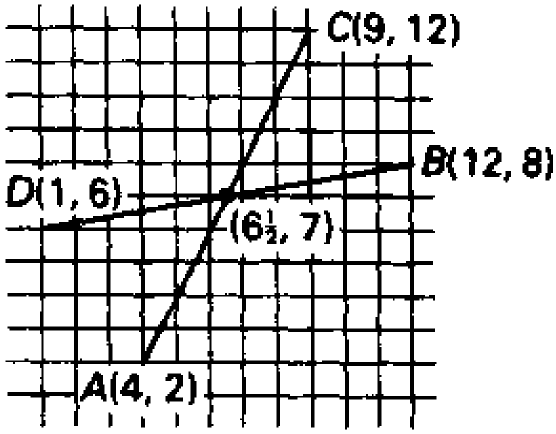
DA 与 CB 也互相平行,并且相等.这些性质的翻译是,从点 D 到点 A 是 3 右 4 下,而从点 C 到点 B 也是 3 右 4 下.为了强调这种翻译是多么一般,这图显示几个具有这种性质的点对,并[91]足以确认,它们的连线都是平行且相等的.



那么，矩形的角为直角怎么证呢？这也容易用同样的语言来解释，只是稍微复杂一点．DA 与 AB 成直角．从点 D 到点 A 是 3 右 4 下，从点 A 到点 B 是 6 上 8 右．“右下”换成“上右”，数翻了一番．

把右上换成下右并保持数成比例必产生一个直角．

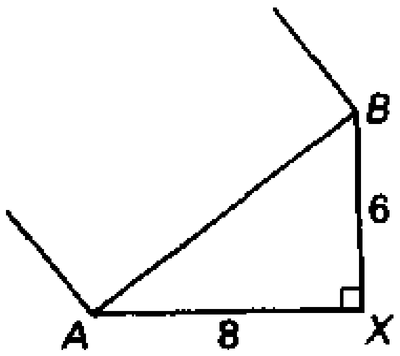
怎样把线段的中点翻译成数呢？这很简单．点(4,2)与点(9,12)的中点是什么数呢？4 与 9 之间的一半是 $6\frac{1}{2}$，2 与 12 之间的一半是 7．A 与 C 的中点是$\left(6\frac{1}{2},7\right)$．



哪里是 $B(12,8)$与 $D(1,6)$的中点？1 与 12 之间的一半是 $6\frac{1}{2}$，6 与 8 之间的一半是 7，所以这中点也是$\left(6\frac{1}{2},7\right)$．这两个中点是同一个不足为奇！

关于平行线、直角和中点说了很多，距离呢？难道在几何中，距离不是基本的吗？实际上是的．不足为奇，请记住我们正用成直角的直线所成的方格，并用所有几何定理中最古老、最传统的一个把它们翻译成数对的语言，这个定理远在毕达哥拉斯发现之前即为巴比伦人所熟知．

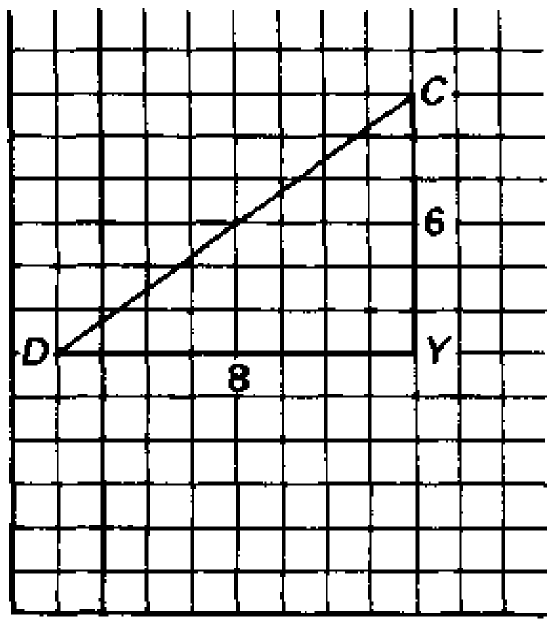
[92]



这里有矩形的底边，把它看成一个直角三角形的斜边，即最长的边．按照毕达哥拉斯定理，

$$AB^2 = AX^2 + XB^2 \text{ 或 } AB^2 = 8^2 + 6^2 = 100,$$

所以 $AB = 10$ 单位．



DC 是同样长吗？在这个直角三角形里，

$$DC^2 = DY^2 + YC^2 = 8^2 + 6^2 = 100,$$

所以 DC 也等于 10 个单位．现在我们可以看出为什么每一个 8 右 6 上的移动产生相等线段而不管我们从哪里算起．每一个这种移动是同样大小的直角三角形的最长的边．这些内容组合得多么漂亮！

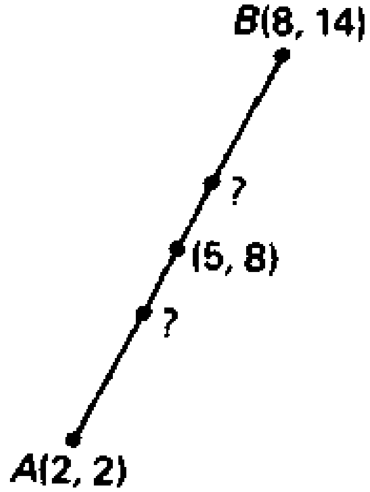
我们再加一个内容.怎样计算矩形面积？最长边是 10 个单位而较短边是 5 个单位，所以面积是 $10\times5=50$. 然而，我们并不需要搞得这么麻烦，特别是不需要计算边长. 只要看一下描述边的移动“8 右 6 上”以及“3 前 4 下”并算出

$$8\times4+6\times3=32+18=50.$$

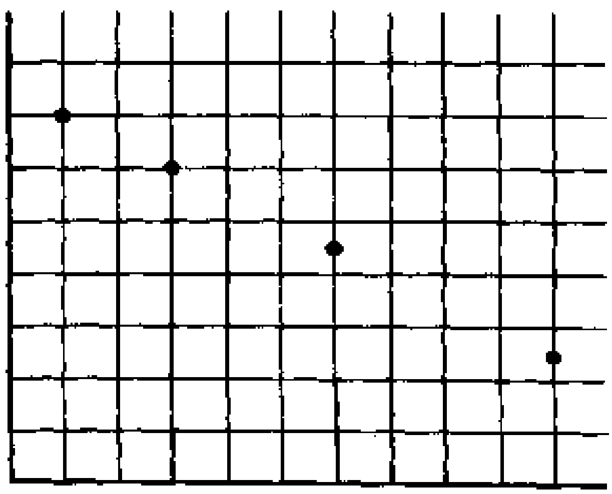
真是妙不可言！ [93]

问题

1.



这条线的中点是(5,8)，在点 $A(2,2)$与点 $B(8,14)$一半的地方. 怎样计算从 A 到 B 的$\frac{1}{3}$处的点？从 B 到 A 的$\frac{1}{3}$处的点在哪里？



2. 有些问题在图上可以直接解出，可是用数来解就难得多. 显然以上各点都在一条直线上.

   点(6,1)，(16,7)与(21,10)真在一条直线上吗？不画图怎样检验？

3. 这五个点除一个外在一条直线上：

   (1,1)　(4,3)　(7,5)　(10,8)　(13,9)

   不画图，哪一个点应当去掉？

4. 把这三个数对“加起来”求它们的和是容易的，例如

$$\begin{array}{r} (5,\ 2) \\ (9,\ 3) \\ +(7,\ 7) \\ \hline (21,12) \end{array}$$

   然后很容易用 3 去“除”这个和以求得原先三点的“平均”：(21,12)被 3 除，得(7,4).

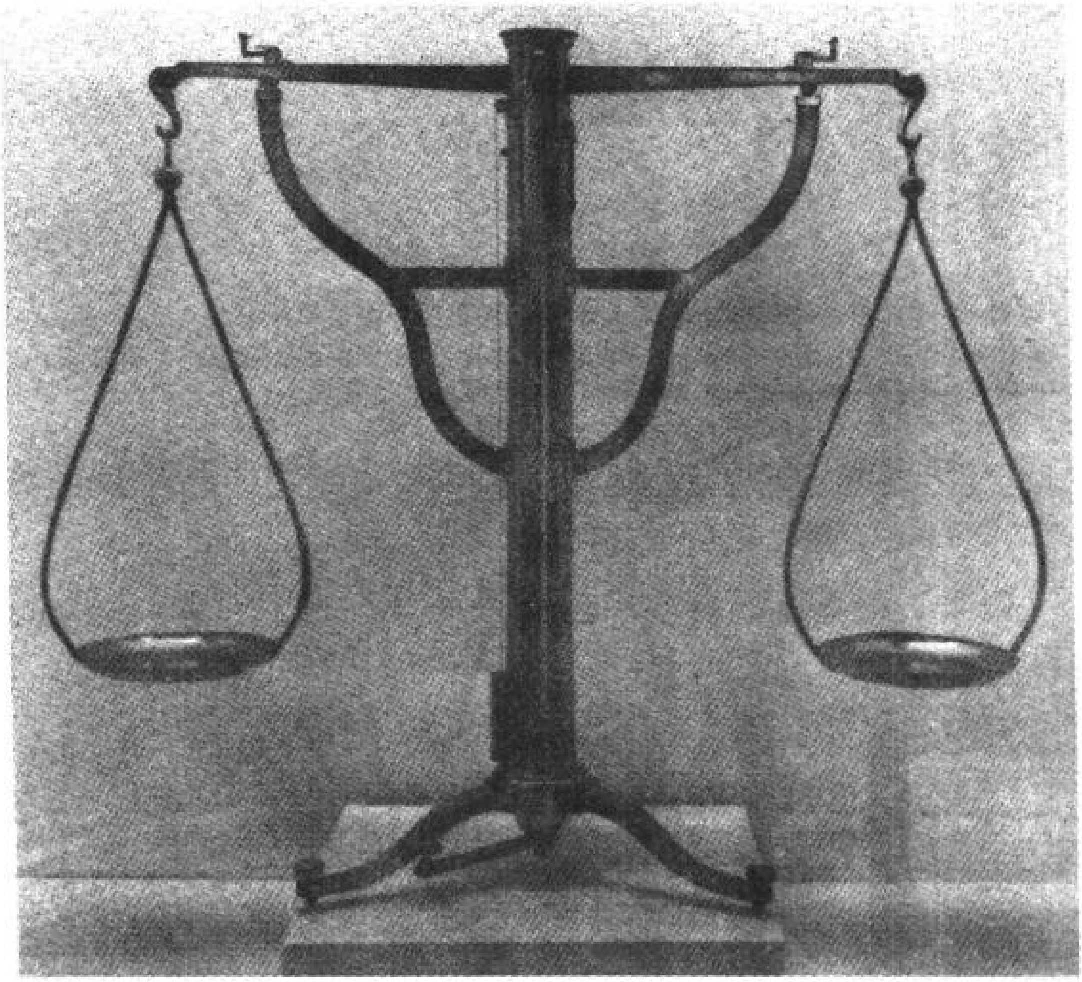
   这个算术计算的几何意义是什么？

5. 先求三个点中两个的“平均”，能否求出三个点的“平均”？例如，如果一个点是(3,8)，而另外两个点的“平均”是(6,5)，能计算所有三个点的“平均”吗？这种计算的几何意义是什么？

6. 点(9,8)，(6,11)，(1,12)和(10,4)在同一个圆上，圆心是点(2,4)，对吗？

[94]

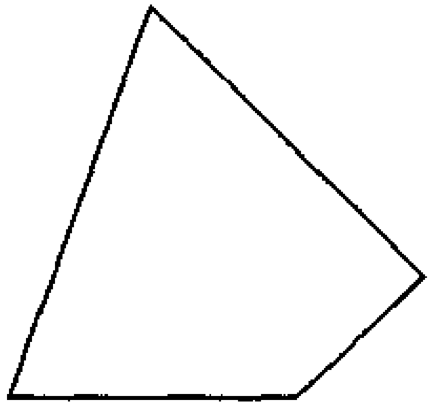
第13章 平 衡 点

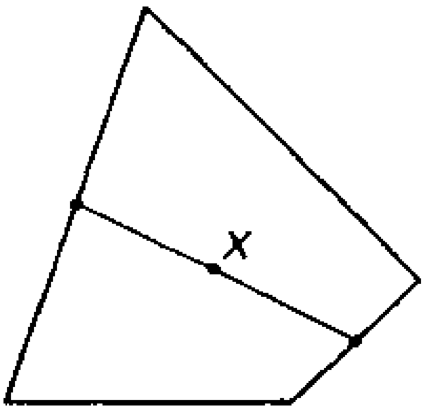


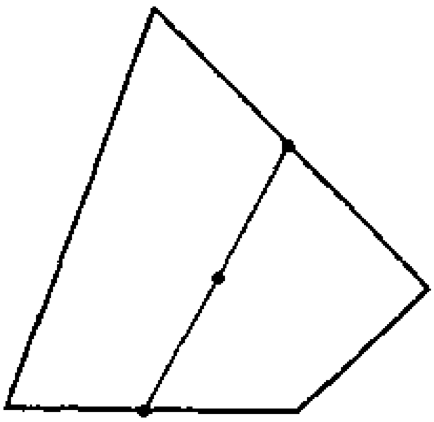
[95]

这里有一个四边形，一个简单的几何对象. 如果我随意地画，就像数学家们常做的那样，连接两条对边的中点，我能把 X 标为四边形的"中心".

然而，不可否认，这个图看上去不很对称. 如果我继续随意

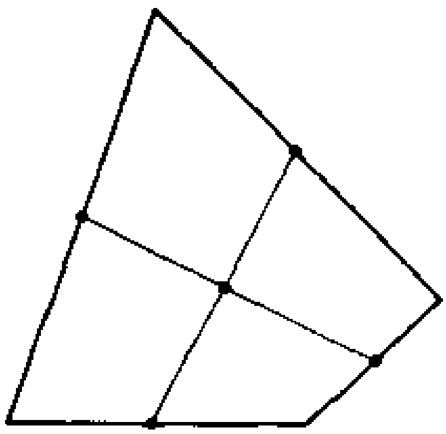




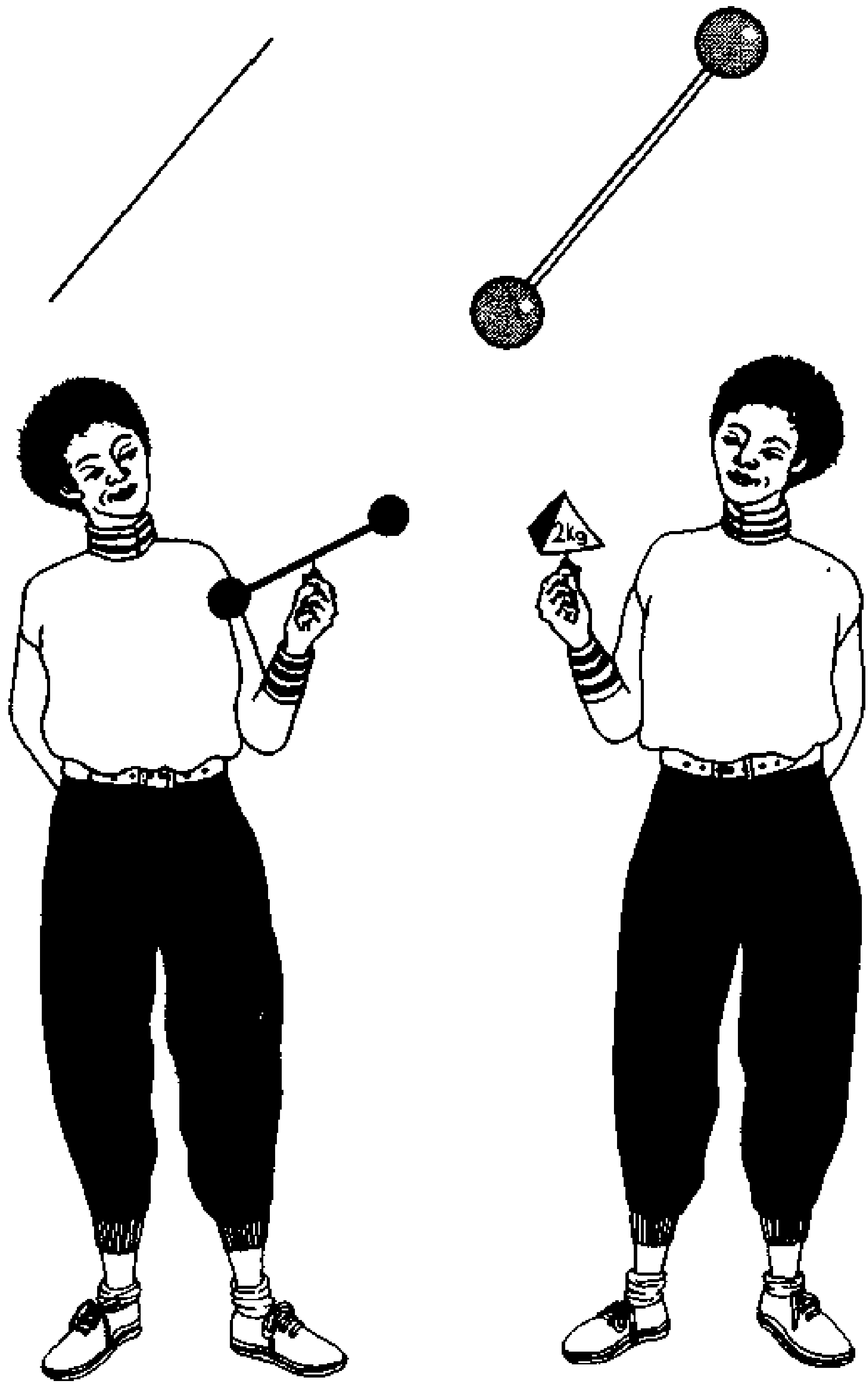


地画，连接另外一对边的中点，也许我将得到另一个不同的“中心”.

让我们来做这个小试验.令人惊奇的是两点重合.这似乎说明这个四边形仿佛真该有一个中心，我能用两个方法作出它.为什么会是这样呢？我怎么能看出必定是这样呢？



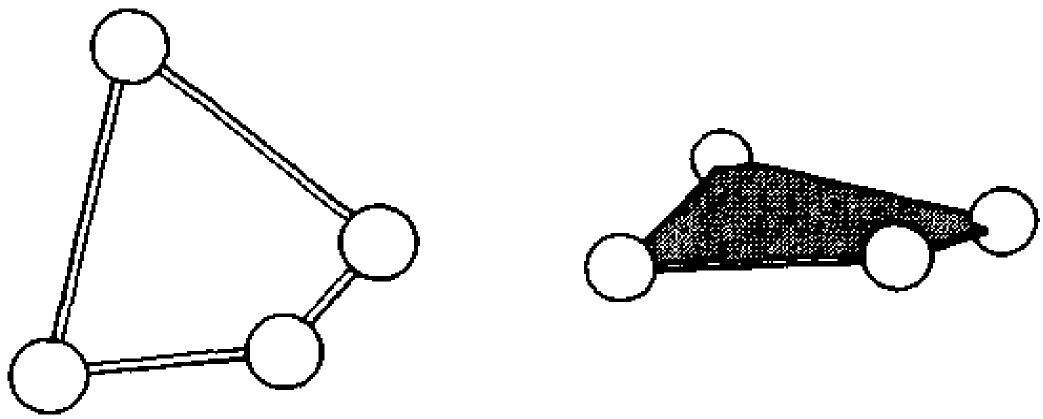
一条途径是利用平行性，一点几何与一点物理(更确切地说，一点力学)之间的比喻或同构.



左边是一条有中点的线，右边是两个相同的1千克的重量，它们用一根细杆相连，设想细杆的重量可忽略不计．然而，它也有一个中点，我可以用针尖在中点处使哑铃平衡．

由于我们忽略了细杆的重量，压在针尖上的重量是2千克．
[97] 实际上，那女孩能够感觉到的正像单独的一个2千克重量．

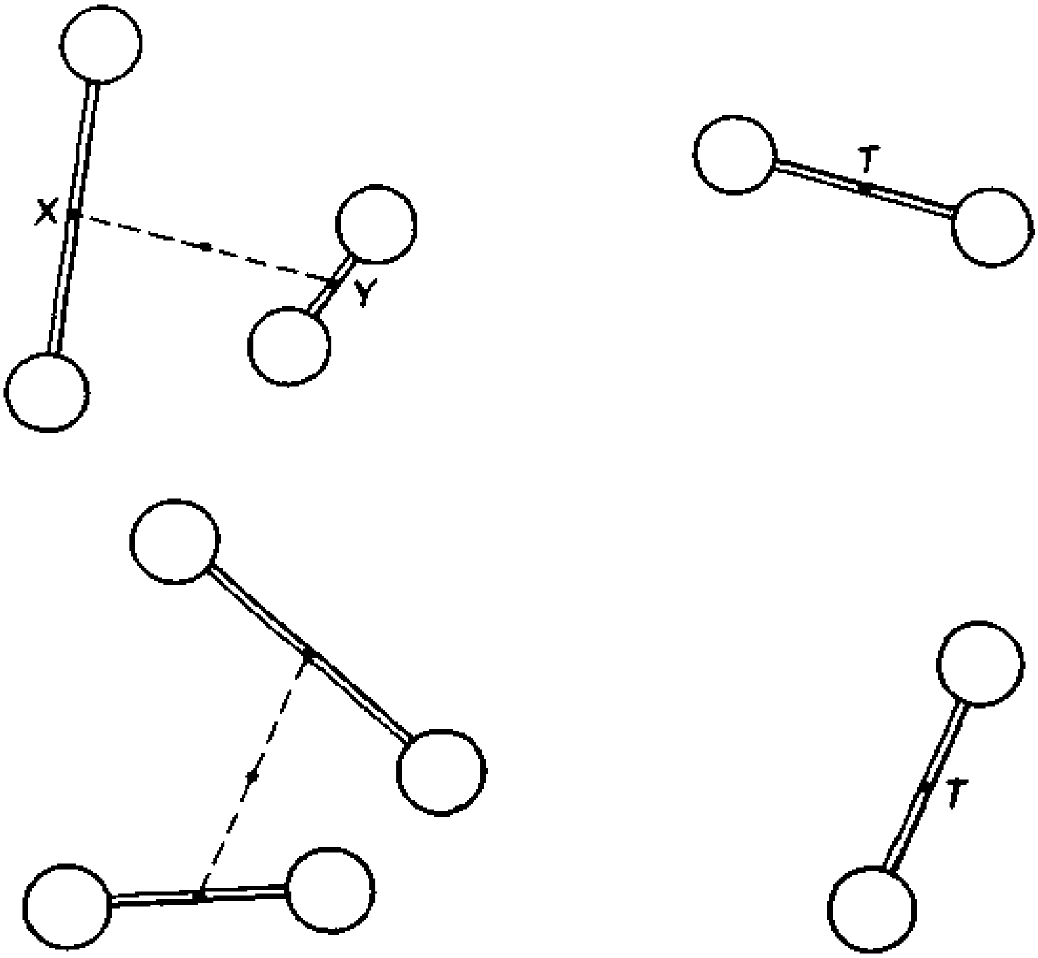
现在我们以同样方法来翻译整个四边形．四个顶点变成四个相同的重量，用四根轻杆连接．再想一想，让它们用轻的薄片连接，因为这样更容易想象在薄片的某一点用针尖来达到平衡．



平衡点在哪里？可以想象在各个不同点上做试验，并进行调整直到尽可能地找到一个没有偏差的点，重量被支撑住，不在任何方向上发生倾斜．然后我可以把手放开．

由平衡物体的经验，我确信只存在一个点，整个玩意儿在这一点达到平衡．但是这个点在哪里呢？一想到哑铃，我就能"计算"这个点的位置．

想象左边的一对哑铃，它就等同于在 X 点放一个2千克的重量．想象右边的那一对，它等同于在 Y 点放一个2千克的重量．于是我们又有一个哑铃，但它是原先一个哑铃的两倍重．它在哪里达到平衡？自然在它的中点达到平衡，在那里的感觉相当于单个的4千克的重量．



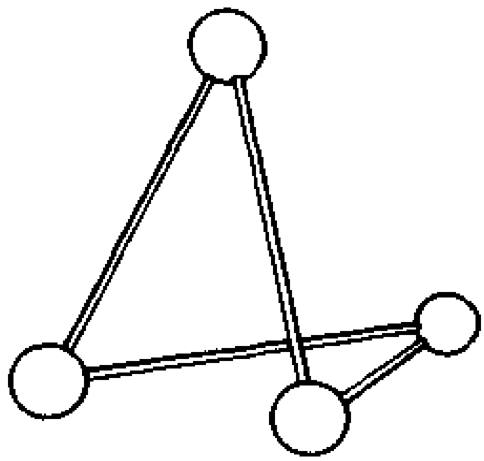
[98]

第二种配置重量的方法怎么样呢？也可以想象将上面和底下的那两对各用单个的重量来代替，做成又一个两倍重的哑铃．它在 T 点达到平衡．

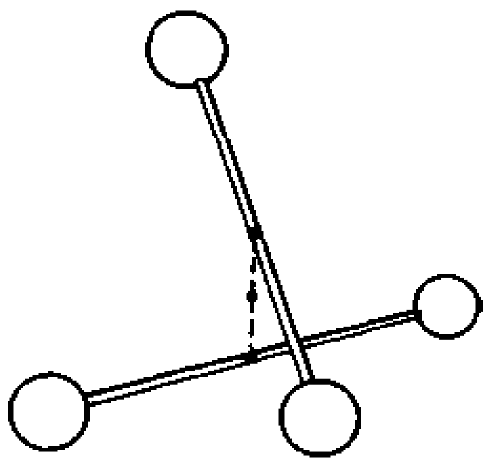
第二种解法的意义是什么？我们已经知道显然有两种找中心的方法．拿哑铃打比方，这两种有什么差别呢？有很大差别，因为，我希望我们已经同意，这些真实的重量，即在无重量的薄片的角上的哑铃，只能在一个点取得平衡．在两个不同的点达到平衡是难以置信的，这与所有我们对真实重物的性质的经验及直觉矛盾．因此，确切地说，因为我们已经考虑到真实哑铃的真实重量，我们就可以确认两个 T 点实际上就是同一个点，这唯一的点，整个玩意儿就在这点取得平衡！

还有一种选择在等着我们．原先的四边形是平的画在纸上

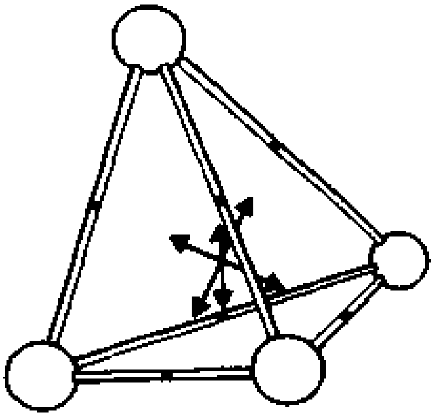
的，并没有暗示说它可以是一个三维的四边形．然而我们并没有利用它是平面的这个事实．我们所用的论证对于如下图所示的三维的四边形全都有效．

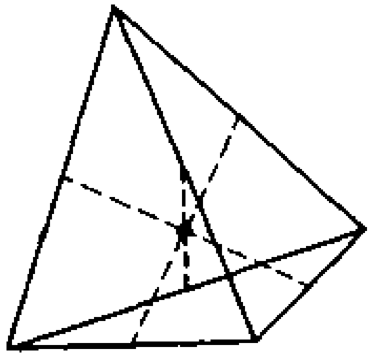


通过想象（对数学家而言是非常宝贵的想象！）或者借助于构造一个真实的物理模型，像以前那样，我们能准确地找到中心．有多少种方法能做到这一点？答案不是两种而是三种不同方法．



第三种选择哑铃球对的方法与选择原先四边形的对角线相[99]对应，这是以前我们忽略的一种可能性．

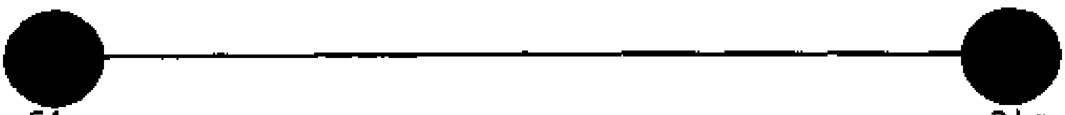




现在把三种想法放在一起.现在整个图是四个重量,用六根轻杆相连接.把它看成一个三棱锥,即四面体.现在,我们的结论可翻译成关于任意四面体的定理.这难忘的结论即"连接四面体对边中点的三条线段在同一点互相平分."

问题

1.



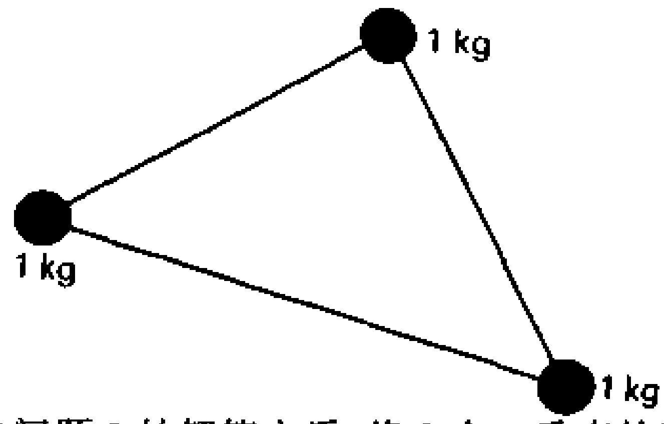
假定两个相等的重量相当于在它们之间的中点放上它们的总重量,它们在这点取得平衡.如果一个是3千克重,另一个是5千克重,你预测它们在哪里取得平衡?连接它们的杆没有重量.

2.



假设与问题1相同,2千克重与1千克重在哪里取得平衡?

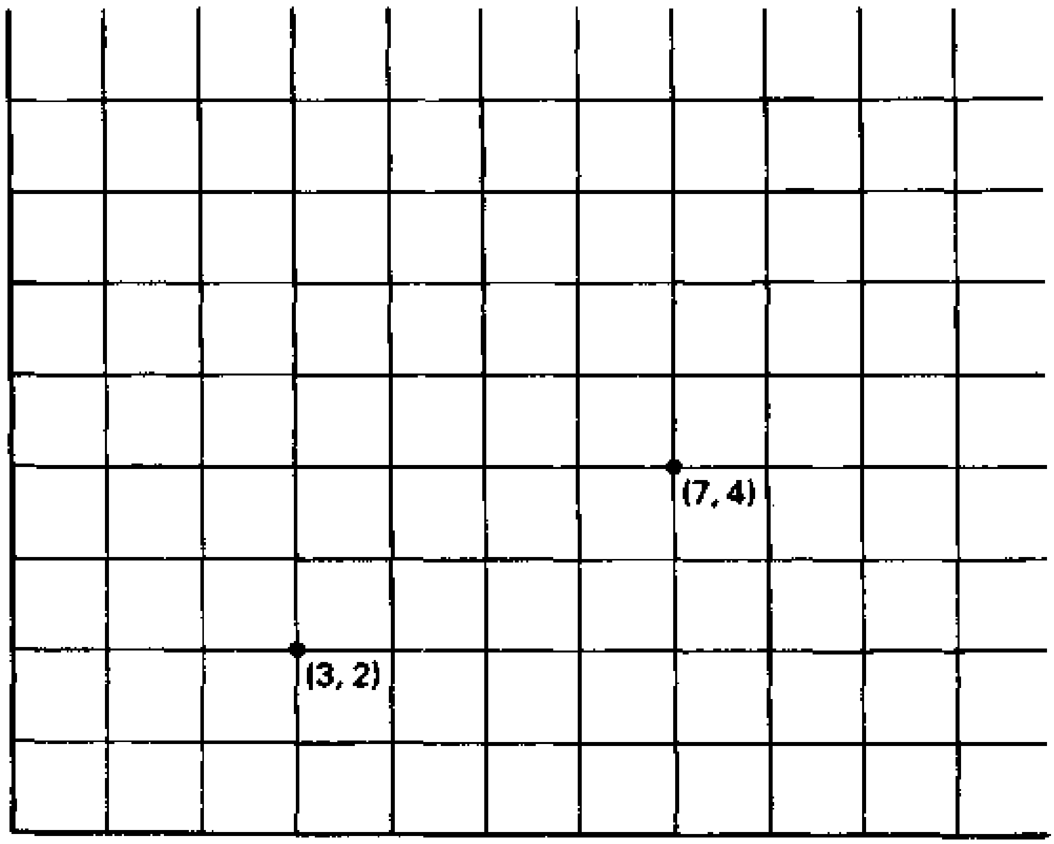
3.



给出问题 2 的解答之后，将 3 个 1 千克的重量放在一个

[106] 三角形的三个顶点上，在哪里取得平衡？

4.

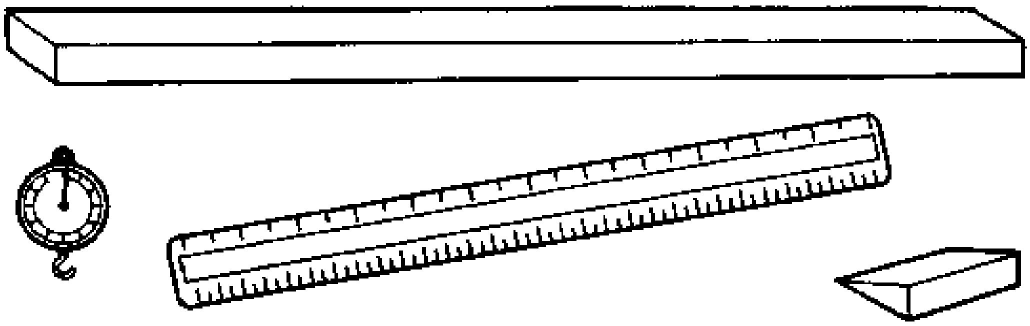


两个点(3,2)和(7,4)已经标在图上. 如果在这两点放相同重量，在哪里取得平衡？

在点(3,2)，(7,4)和(2,6)上放相等重量，在哪里取得平

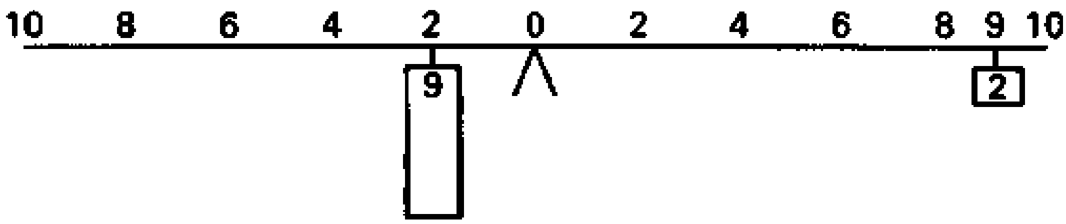
衡?

5.



这是一根又长又重的均匀木条,你想称出它的重量.可是你只有一个小弹簧秤,只能秤几千克重,此外有一把刻度尺和一个坚固的楔形支承.怎样称整个木条的重量?(不允许你把木条切成小块!)

6.



这个天平放在楔形支承上,支承点标记为 0.问:9 千克重与 2 千克重,可以平衡吗?

第14章 多重含义



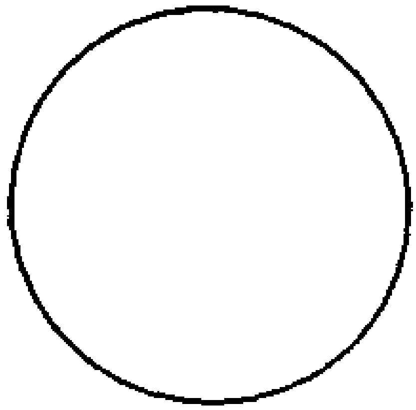
如果一种语言没有不确定性与双重含义，那该有多贫乏！多平淡！多无味！幸好所有语言都具有意义上的不确定性，特别是都具有比喻.事实上，许多语言学家相信所有语言在本质上都是比喻，并且语言的增长和发展的主要来源是由比喻所产生

的意义上的扩张.

对科学家而言,这几乎是自相矛盾的.他们喜欢能够精确地说出他们所知道的东西,然而,他们的新思想常常在用新方法解释他们所知道的东西时出现.或许会认为数学语言一定真是极其精密的.如果数学家不知道他们在谈些什么,谁知道呢? 在某种意义上讲,这是真的.任何一个数学家应该能够解释他或她用数学语言所作的特殊陈述的含义,并且这种解释应该是清晰易懂的.同时,这也是真的,同一个陈述可以作各种解释. [102]

这里没有矛盾.这也不是数学的弱点.完全相反! 这正是数学的一大优点.如果一个数学陈述永远只能用一种方式来解释,你该需要多少个陈述啊!

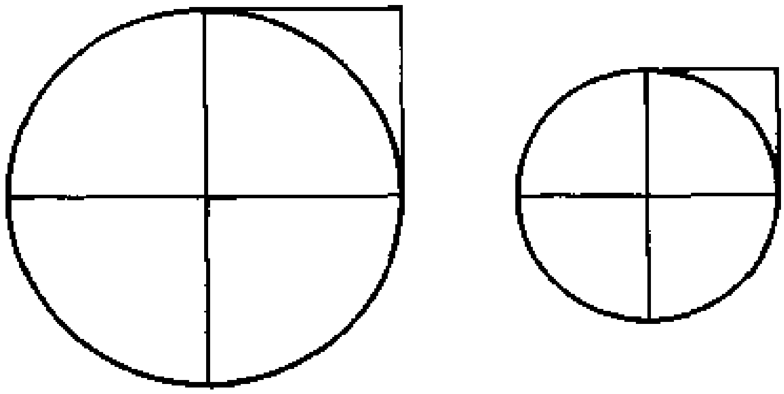
每一种陈述只供给那么一点儿信息! 但因为它们可以用很多方式来解释,所以它们更能增加知识,更有用,更强有力.



这是一个半径为 1 的普通的圆.正如每个女孩和男孩所熟知的,它的面积由公式 $A=\pi r^2$ 给出.这意味着什么呢? 一种非常容易而且实际的意义是,当你计算圆面积时,你只要用 r^2 值乘 π 就可以了.由于 π 近似于 3.14,半径的平方是 1,这圆的面积近似于 $3.14\times1=3.14$ 平方单位.

这种作为公式、作为算法的解释,告诉你为了做出正确计算必须实施哪些步骤——当然是很有用的,但是它并没有说明公

式为什么正确.这个图可以做进一步说明.



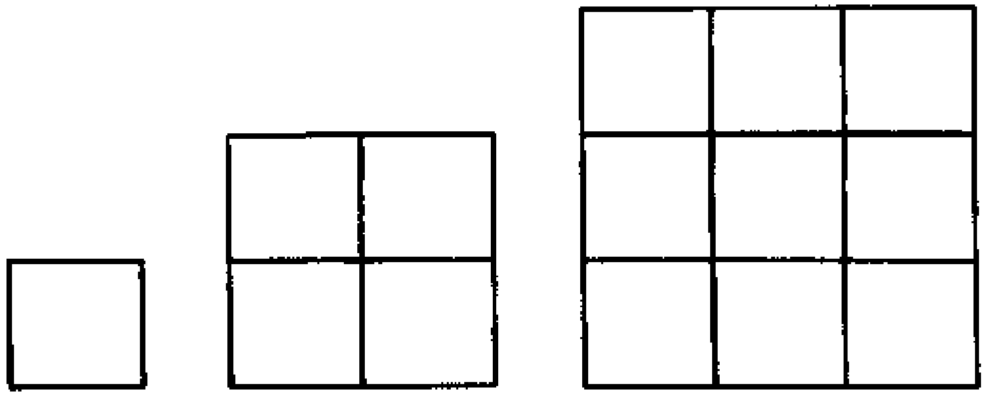
左图是一个圆,它有两条直径,还有一个正方形,它在一个象限里.正方形的边长是1个单位,因此它的面积也是1个平方单位.当然圆更大些.圆比正方形大多少?

看一看第二个圆,也有一个正方形在一个象限里.这个圆怎样与它的正方形作比较呢?在各种情况里,比较会不一样吗?如果在第一个图里,圆面积大约是正方形面积的3倍,那么,较小圆的面积是不是也大约是较小正方形面积的3倍呢?的确如此.虽然面积的绝对数值改变了,它们的比不变.我们可以把这一点写成比例:

大圆面积:大正方形面积 = 小圆面积:小正方形面积.

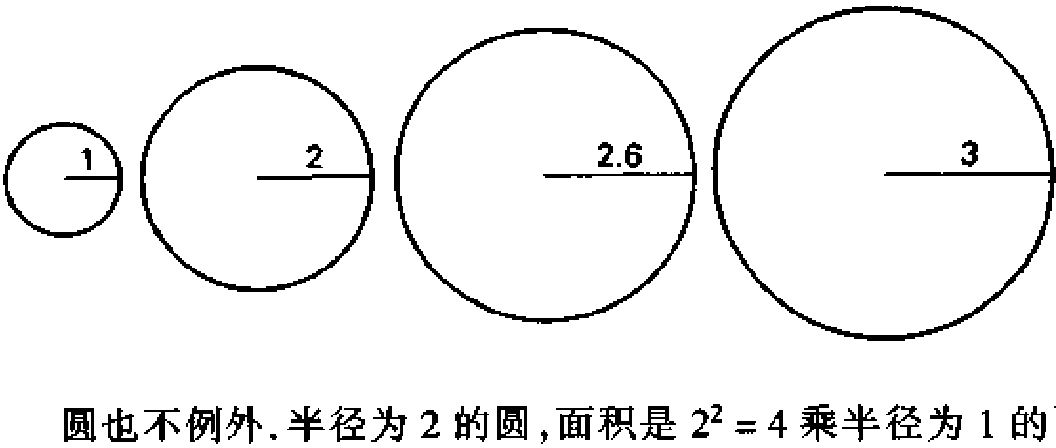
假定每个圆的面积大约是与它相配的正方形面积的3倍.[103]事实上,这比略大于3.它是个称为 π 的数,近似于3.14159.关于一般的圆和它的面积,这种观点告诉我们一些什么呢?在一个象限里的正方形,面积是 r^2,这里 r 是圆的半径.这个公式告诉我们圆的面积是正方形的 π 倍.因为所有圆的面积是在一个象限中的正方形的面积的 π 倍,因此圆面积等于 πr^2.

这是这个公式的一种解释,它比仅仅说成是算法的解释讲出了更多的道理.然而,它不是唯一的解释.



这里有三个正方形.中正方形的高与宽都是小正方形的两倍.它的面积是小正方形面积的 $2\times2=4$ 倍,如图所示,它被分成4个小正方形.大正方形的高与宽都是小正方形的三倍,它的面积是小正方形的 $3\times3=9$ 倍.大正方形的宽度也是中正方形的 $1\frac{1}{2}$ 倍,面积是中正方形的 $1\frac{1}{2}\times1\frac{1}{2}=2\frac{1}{4}$ 倍.作为检验,注意 $9=2\frac{1}{4}\times4$.

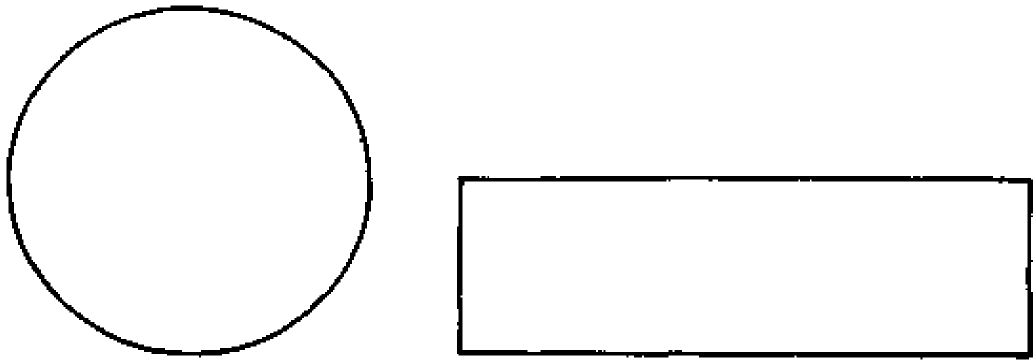
当一个图按某个因子扩大时,譬如说2.6(保持它的形状不变),那么,它的面积按同一个因子的平方扩大:$2.6^2=6.76$,这是一般规则.第1章问题5说明了同样的原理.



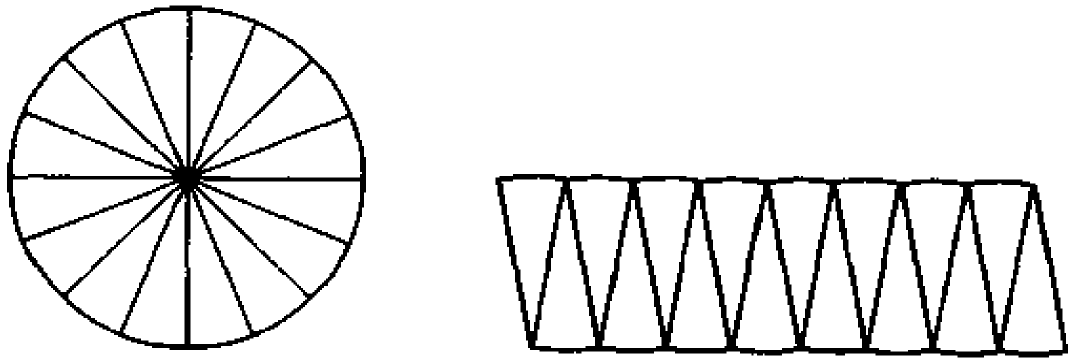
圆也不例外.半径为2的圆,面积是 $2^2=4$ 乘半径为1的圆面积.半径为3的圆则是9乘这个面积.半径为2.6的圆是 $2.6^2=6.76$ 乘单位圆的面积.与前面的解释形成对照,现在看不到正方形,只有圆了.只剩下一个困难.我们需要知道单位圆的面

积.那是多少呢?对了,单位圆的面积是 3.14159…,因此,半径为 2 的圆面积是 4×3.14159…,等等.

在第一种解释中,π 是圆与正方形之间的比.在第二种解释中,它本身就是面积,即单位圆的面积.其中有一种解释不"正确",不"对",不"真实"吗?有一种比另一种更好吗?当然不!
[104] 两种同样好,仅仅是用不同观点看同一个公式而已.



还可以用第三种观点来看这个公式.πr^2 可以写成 $r\times\pi r$,它可以表示一个矩形面积,这个矩形的一个方向是 r 个单位长,另一个方向是 πr 个单位长.这样看有意义吗?从适当的观点来看有意义吗?的确有的.卓越的希腊数学家阿基米德第一个认识到,如果一个圆被分成许多小片,像分蛋糕给许多人那样,那么,这些小片可以重新排列,近似于一个矩形.



切出的小片越多,每块小片越接近于三角形,重新排列的图形就越接近于矩形.这矩形有多高?它的高度是 r,即圆半径.这矩形有多长?是圆周长的一半,按照另一个熟知的公式,即$2\pi\times r$

的一半.因此,矩形面积是 $r\times\pi r=\pi r^2$,正如所期望的那样.

每种观点,都留下些事没有作解释.在第一种观点里,为什么圆近似于 3.14159…乘象限里画的正方形面积.在第二种观点里,为什么单位圆面积近似于 3.14159…平方单位.在第三种观点里,为什么绕圆一周是 $2\pi r$ 即大约 6.28318….为什么?那是另一回事了!

问题

1. 这些问题中,哪一个的正确答案是$\frac{3}{5}$?

   (a) $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$等于多少?

   (b) 把 3 五等分,每份多少?

   (c) 3 是 5 的多少倍?

   (d) 3 的$\frac{1}{5}$是多少?

[105]

2. 对这个方程

$$5x-6=2x$$

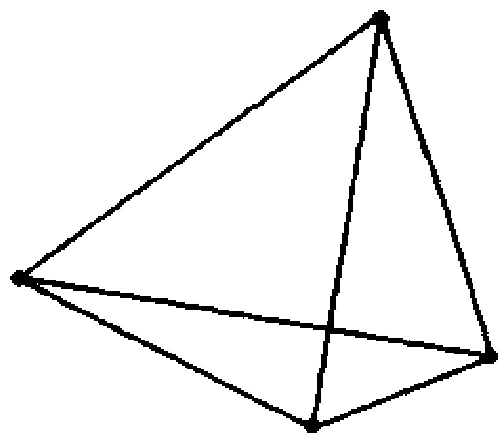
   的下述解释,哪一个是正确的?

   (a)$5x$ 是 6 与 $2x$ 的和.

   (b)从 $5x$ 减少到 $2x$ 是 6.

   (c)$5x$ 与 6 的差是 $2x$.

3.



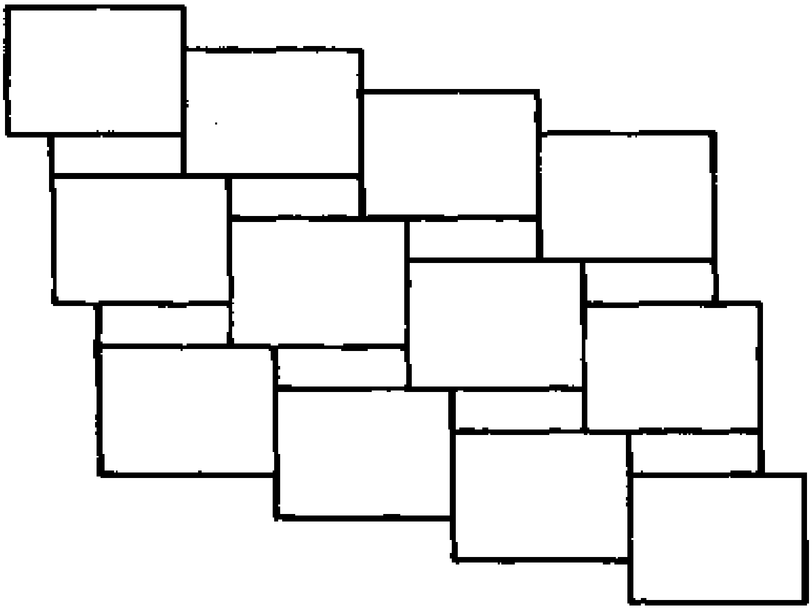
这是

(a) 四面体的图吗?

(b) 4个点与把它们成对地连接起来的6条线吗?

(c) 两个有一条公共边,并且自由顶点也连接起来的三角形吗?

4.



这是

(a) 由两种尺寸矩形组成的拼花吗?

(b) 由完全相同的矩形组成的拼花,其中每一行在水平和竖直方向都作了滑动,留下矩形的洞?

5. 陈述"所有边都相等,所有角都是直角的多边形"定义了

(a) 正方形?

(b) 矩形?

(c) 两者都不是?

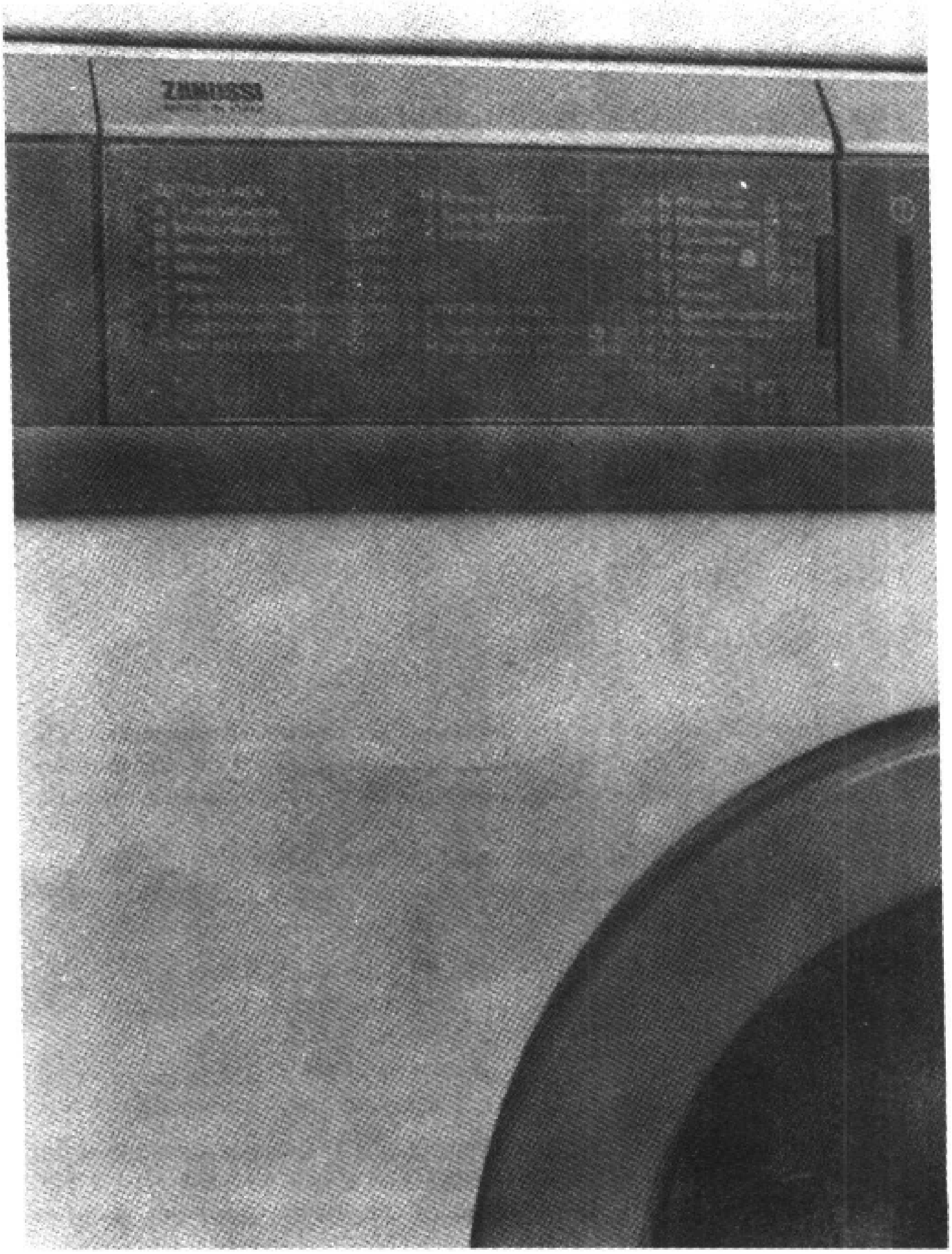
6. 下述关于负数的解释中的哪一个是合理的?

(a) 按顺时针方向测出来的角是正的,按逆时针方向测出来的角是负的.

(b) 资产是正值,负债是负值.

[106] (c) 零上温度是正值,零下温度是负值.

第15章　相配的问题



每个人都熟悉机器，如果你正确地按说明书操作，机器制造者保证它总能正常运转．锁的钥匙是非常简单的例子，太简单了，几乎不需要说明书．稍复杂一点的是必须转动两次或三次锁才能打开的钥匙．对讲机就更复杂了，洗衣机是另一种高水平的机器．

图书馆的计算机终端还要来得复杂，它可以让你发现书是不是在书架上，哪些书你可以往外借，哪些书已经过期了．它们之所以容易操作只是因为荧屏会列出下面的可用的步骤迅速地为用户服务．虽然说明书写得特别清晰明确，只要按顺序一步一步操作就可以了，可是编制的模式仍令未受过训练的人心慌意乱．

许多数学问题可以用同样的方式解决．下面的方程可能源自于物理，或化学，或经济，或社会科学中的问题，或来自于纯数学问题．不管来源如何，都可以用同一个熟知的例行程序，称为算法，容易地解出来．

$$\begin{aligned} 10.749u - 1.44v &= 2, \\ 6.05u + 39.81v &= 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 5z &= 7, \\ 4x - y + 2z &= 10, \\ 7x + 4y + 6z &= 9; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12a \qquad\quad - c \qquad &= 1.43, \\ 8a - 13b \qquad\quad + 8d &= 7.50, \\ 8b \qquad\quad - 2d &= 7.91, \\ 4b - 6c + 3d &= 1.59. \end{aligned}$$

对数学家来说，所有这些方程组基本上都是“同一个”．在各个方程组里字母和数不一样，但解法实际上是一样的，如果解存在的话，计算机很快就能算出来．

识别这些方程组属于同一类型并不困难.只要找一个简单模式,非常像找炮制这两首五行打油诗的模式.

蜘蛛的腿比跳蚤的多,
我给你的这个知识是免费的.
如果你觉得它有用,
而不只是深奥的,
记住你是从我这里得到的.

我整天在河边溜,
玩儿,对准鱼扔石头,
五个渔翁想,
把我扔到水里头,我忙表示,
十分感谢五位了,我还得继续往前走.

发现一首诗是另一首的模仿有时更为困难,但不在下面的例子里.罗伯特·骚塞①是一位严肃诗人,但骚塞的格律比他的感情更打动刘易斯·卡洛尔.骚塞的诗开头与结尾如下: [108]

"你老啦,威廉爸爸,"年轻人大声叫,
"留给你的一小撮头发是灰白色;
你精神矍铄,威廉爸爸,亲切的老人,
我请求您,现在就告诉我原因."

"我很快乐,年轻人,"威廉爸爸回答说,

---

① 罗伯特·骚塞(Robert Southey,1774—1843),英国湖畔派诗人.1813年被封为桂冠诗人.主要作品有长诗《克哈马的诅咒》和歌谣《贝克莱老妇》.——译者注

"让我的话引起你的注意；
在青年的岁月我牢记上帝！
他也没有忘记我的年纪."

刘易斯·卡洛尔以诗作答：

"你老啦，威廉爸爸，"年青人说，
"你的头发变得很白；
但你却不停地倒立——
你以为，在你的年纪，这是对的?"

"在我青年的岁月，"威廉爸爸回答他的孩子，
"我担心那会伤害我的脑子；
但是，现在反正没脑子，
玩了又玩也不碍."

数学中，许多本质上相同的问题很容易认出来，因为它就是这么简单的模型. 在数学的应用中，大多数普通问题都属于这一类. 相同的标准类型一再出现，相同的算法用来解它们. 新问题不断地发现，需要设计新算法解它们. 这是数学力量的一个源泉，它把很多初看起来困难的问题化为普通练习.

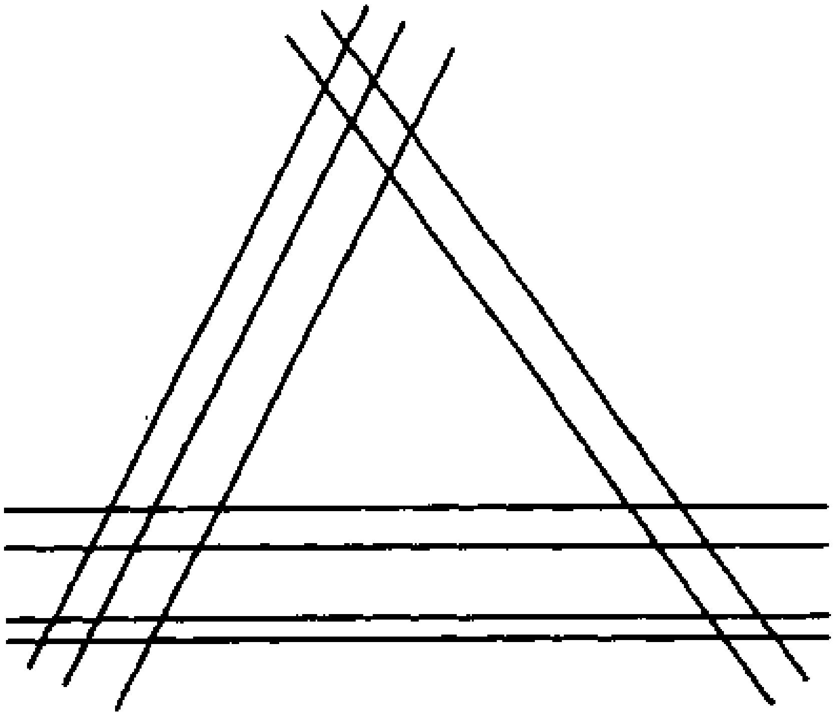
然而，并非所有本质上相同的问题初看就是这样. 它们的相同结构可能隐藏得很好. 例如：

[109] 问题 1：在这个图里有多少个三角形?

问题 2：导演从 2 个女演员，3 个男演员和 4 个儿童中选一个母亲，一个父亲和一个孩子，有多少种方法?

这两个问题之间的联系明显吗? 那么，让我们先解决导演的问题，采用粗糙却有效的方法——写出所有的可能.

为了不遗漏任何一种可能，聪明的办法是按照简单的分类



法把它们列成一个表，所以让我们首先给这些演员起名字．女演员叫安妮和巴巴拉；男演员叫查尔斯，戴维和爱德华；儿童叫弗兰克，乔治，海伦和简．只用第一个字母，导演的可能选择可以按如下次序列表：

ACF　*ACG*　*ACH*　*ACJ*　*BCF*　*BCG*　*BCH*　*BCJ*

ADF　*ADG*　*ADH*　*ADJ*　*BDF*　*BDG*　*BDH*　*BDJ*

AEF　*AEG*　*AEH*　*AEJ*　*BEF*　*BEG*　*BEH*　*BEJ*

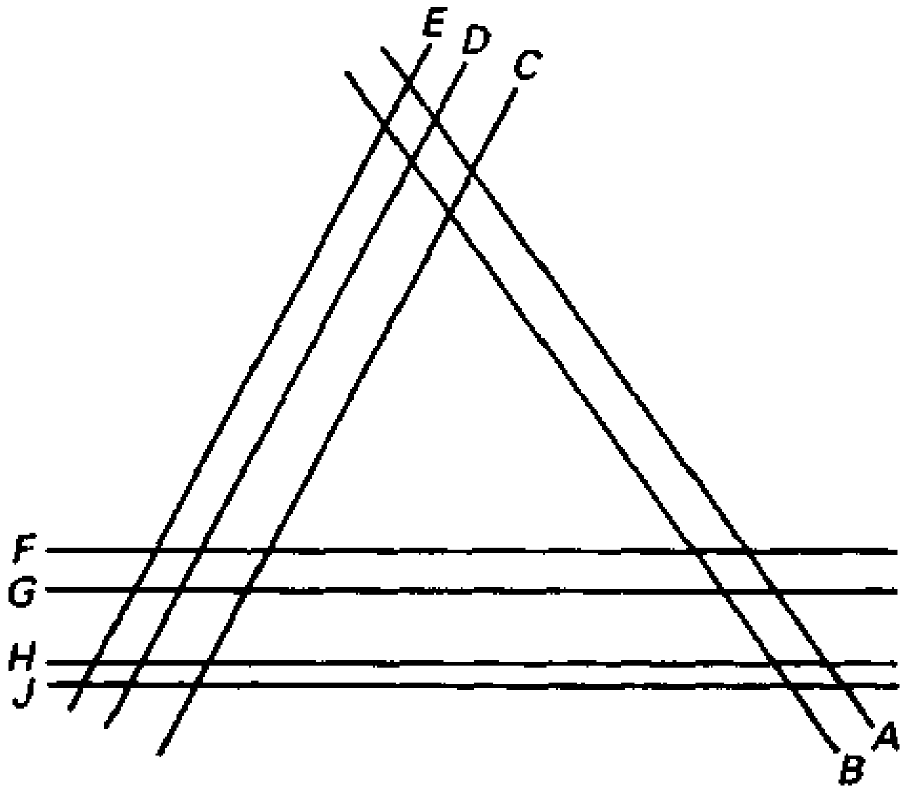
这表背后的分类方法是十分简单的．如果安妮是母亲，那么男演员中的每一个——*C*，*D* 和 *E* 都能与儿童演员中的任一个——*F*，*G*，*H* 和 *J* 配合．如果巴巴拉是母亲，重复同一个模式．

导演有 24 种选择，这个数是这样算出来的：演母亲的 2 种选择乘以演父亲的 3 种选择再乘以演儿童的 4 种选择，得出全部可能选择的总数是 $2\times3\times4$．

数三角形的个数就不那么简单了．但稍作观察是有帮助的．

因为直线分成互相平行的三组，我们注意到，任一个三角形必须包括 4 条底线中的一条它也必须包括右边两条直线中的一条与左边三条直线中的一条.

现在比较容易数了，但当我们数的时候，还没有办法写下每个三角形，除非给直线标上符号. 所以让我们给它们取上名字.



选给直线标名的字母就是导演问题中人名的开头字母，这 [110] 并非巧合. 可能的组合也是一样的：

ACF	*ACG*	*ACH*	*ACJ*	*BCF*	*BCG*	*BCH*	*BCJ*
ADF	*ADG*	*ADH*	*ADJ*	*BDF*	*BDG*	*BDH*	*BDJ*
AEF	*AEG*	*AEH*	*AEJ*	*BEF*	*BEG*	*BEH*	*BEJ*

现在很清楚了，这两个问题本质上是一样的，尽管它们有不同的"外衣"!

下面两个问题，虽然形式更巧妙一点，但仍然是同构的.

问题 1：有多少个数恰好等于它的三个不同因子的和?

问题 2：把 1 拆成三个不同的倒数的和，有多少种方法？

想想第一个问题的可能答案，很容易指出像 12，24 与 36 这样一些数，每一个都有很多因子，也确实能表示成只有三个因子的和：

$$12=6+4+2,\quad 24=12+8+4,\quad 36=18+12+6.$$

与此形成对照的是只有很少的方法可以把 1 表示成三个倒数的和，因为大多数倒数很小：

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.$$

这个表示是不许可的，因为倒数必须是不同的，但这只是强调并非所有倒数都能小于或等于$\frac{1}{3}$，因此，其中必有一个大于$\frac{1}{3}$. 于是其中之一必定是$\frac{1}{2}$，由于

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

也是不许可的，仅有的可能是

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$$

这个倒数问题怎样与因子和的问题相联系呢？特别地，这个唯一解怎样与第一个问题的许多解相符合呢？

通过用数去除"因子"问题中的解，可以看出这两个问题的答案，如：

$$\frac{12}{12}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{2}{12},\quad \frac{24}{24}=\frac{12}{24}+\frac{8}{24}+\frac{4}{24},\quad \frac{36}{36}=\frac{18}{36}+\frac{12}{36}+\frac{6}{36}.$$

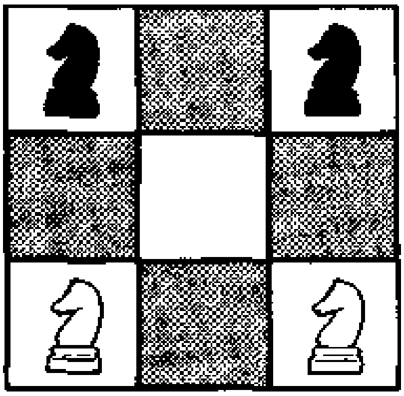
当所有分数都化简成最简分数时，所得的方程总是"$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$". 把这个想法反过来，用任何一个能被 2，3 或 6 整除的数去乘数 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$或$\frac{1}{6}$，我们就能得到第一个问题的解，因为这样留下的和只有整数而没有因子.

什么数可以被 2,3 或 6 整除？噢，它们是 6 本身和所有 6 的倍数. 用 6 乘给出第一个问题的解：$6=3+2+1$. 用 12,24 和 36 乘给出已经列出的解. 处于它们中间与趋于无穷的其他可能倍数是 18,30,42,48,54,… 这个无穷数列的每一项，都有效地

[111] 隐藏了 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ 这一事实.

问题

1.

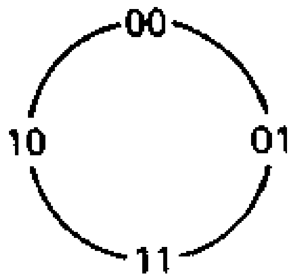


根据 H·E·杜登尼(H.E.Dudeney)在他的杂志《数学游戏》上的讨论，这个难题是瓜拉尼(Guarini)在 1512 年首先提出的. 问题是让两匹白马与两匹黑马以尽可能少的步数交换位置. 所有马都按国际象棋规则走棋，并且同一个马连续跳任意次只算一步.

你的任务稍有不同，要发现用新的方法来看这个难题，使它更容易解决.

2. 这六个问题是真正的成对同构的. 换句话说，解出其中三个，你就能解决掉所有六个，倘若你懂得哪些问题彼此等价的话. 它们怎样配对？

(a)



四个二进制数 00,01,10 和 11 可以排成这个圆周序列,其中每一对相邻数,有一对相同数字,一对不同数字.

有多少种方法可以把这八个二进制数,000,001,010,011,100,101,110 与 111 排成类似的圆周序列,使相邻的每一对数有两处数字相同?例如,010 和 011 可以相邻,因为它们都有相同的前两位数字,但是 001 与 100 必须分开.

(b) 解二次方程: $t^2+10=10t$.

(c) 如果矩形的四条边的和是20,它的最大面积是多少?

(d) 我想到两个数,它们的和是 10,积也是 10.我想的数是什么?

(e) 从立方体的一个顶点出发,每一个其他顶点恰好走过一次,最后回到出发点有多少条路线?

(f) 两数的和是 10,它们的积能有多大? [112]

第16章 代数游戏

代数可以看作是谈论数学对象及它们的性质的语言.有一种普通数的代数,它是在学校里教的第一种代数.还有一种力学中关于力的代数,如同速度,需要由它们的大小及方向来描述.另有一种代数,它使一个立方体可以从一个方盒子里取出来,并再放回去.令人惊奇的是,这种代数不是浅薄的玩意儿,相反,它往往以易于察破的伪装出现在众多的场合.

甚至还有谈论其他代数的代数.但不同于普通语言,代数有它的特殊性质,从一个代数陈述出发,用一系列很简单的运算,你能得到许多东西.如果开始的陈述是真的,那么所有从它推出来的陈述也都是真的.这是一个发现新真理的强有力的方法,尤其在强调代数陈述用普通语言说出来的时候.

许多代数语句能以不同方式来"看"."观察","看透"和"向前看","看看会发生什么",在代数中正如在几何中,或在数学家常用的伴有几何的代数中一样重要.动词"看"可能只作为一种比喻,然而它描述的行为却是真实的,即使在代数中不需要或者常常没有图或图象.

为了正经的目的,或者作为趣味的谜,假定我们希望求出两个普通的数,它们的和是 10,而积是 22.在代数语言里,我们可以取两个字母来代替数,设为 p 和 q,并写下

$$p+q=10, \qquad pq=22.$$

这些算式没有直接告诉我们这些数是什么,甚至这样的数是否

存在也不知道.现在该是我们把这些算式魔术般地变换成不同算式的机会了.而这些不同的算式将解答那些方程.我们应该先做什么?这正是困难的所在!

正如不存在告诉我们怎样考虑几何问题的规则一样,也不存在告诉我们在代数游戏中该走哪一步的规则.跟下棋的人一样,我们必须依赖基于过去经验的混合判断,并向前看一看来决定最好的步骤.然而又不同于下棋的人,我们不用计时,所以没有时间限制的麻烦,甚至还有更大的优越性,我们要收回多少步就可以收回多少步,而当我们愿意的时候又可以重新开始.

一种想法是把关于两个数的两个算式转换成关于一个数的一个算式,希望这样做将会直接告诉我们那个数是什么.这可以 [113] 由下面一系列的步骤来做到.

$$p+q=10, \qquad pq=22;$$
$$p^2+pq=10p, \qquad pq=22;$$
$$p^2+22=10p.$$

注意,中间算式本身是没有很多启示的.在代数游戏中经常是多数步骤并不光芒四射,它们只不过是通向重要结果的阶梯.

对我们的目的而言,很不幸,这里的第三个算式是一个"二次"方程,是中学生那一辈人所熟悉的,它可以解出来,却肯定不能直接告诉我们 p 会是什么.因此,只好回到原先的位置再做些别的运算.下面的做法就高明多了.如果数学证明像象棋比赛那样注解,那么,由于它的出色及背后的巧妙思想,第一步该给一个"!".

$$p+q=10, \qquad pq=22;$$
$$(p+q)^2=100, \qquad pq=22;$$
$$p^2+2pq+q^2=100, \qquad 4pq=88;$$
$$p^2-2pq+q^2=100-88=12,$$
$$(p-q)^2=12,$$
$$p-q=\sqrt{12}.$$

这一系列运算的目的是把$(p+q)^2$转换成$(p-q)^2$,从而发现$p-q$的值.现在知道p与q的和与差,我们可以容易地再分别各做三步运算,算出它们.

求p: $p+q=10$,
$p-q=\sqrt{12}$;
$2p=10+\sqrt{12}$,
$p=5+\frac{1}{2}\sqrt{12}$.

求q: $p+q=10$,
$p-q=\sqrt{12}$;
$2q=10-\sqrt{12}$,
$q=5-\frac{1}{2}\sqrt{12}$.

这一系列步骤是有效的,并且是基于巧妙的构思,但它还不是最简单的途径,解的形式$5+\sqrt{?}$和$5-\sqrt{?}$可以给出一些暗示.

暂且回到原先位置,丢开原来的解法,想一想.如果两数的和——例如,是10,那么其中一个超过5,超过部分正好是另一个少于5的部分.例如,$10=6+4$,6与4一个大于5,一个小于5.把这个想法记在心上,忘记原先选的符号p与q,称两个数为$5-e$与$5+e$."e"的选择完全是任意的.任何别的字母也一样可用.

这是一个极好的想法,因为现在两数的和自动达到10:

$$5-e+5+e=10.$$

于是,我们只要把注意力集中到这样一个事实,即它们的积是22:

$$(5-e)(5+e)=22.$$

[114] 幸好这个积很简单并且是熟知的.两个数的和与差的积是它们的平方差,所以立即得到

$$5^2-e^2=22,$$
$$25-e^2=22.$$

这就简单得多了！如果$25-e^2=22$,那么e^2必定是3,e是$\sqrt{3}$.于是,两个数是$5-\sqrt{3}$与$5+\sqrt{3}$.这些是上面已经求得的数吗?是的,因为$\frac{1}{2}\sqrt{12}$等于$\sqrt{3}$.

原先的一系列步骤把我们引向一个二次方程.是不是我们

总能将这些步骤反过来化为两数和与积的问题，从而解二次方程呢？实际上，通过一个很简单的步骤，然后加以解释，我们能够做到这点. 作为二次方程的例子，

$$t^2+77=18t$$

开始每项都除以 t：

$$t+\frac{77}{t}=18.$$

这个式子的左边是两个数，t 与$\frac{77}{t}$，它们的积是 77，而整个式子表明这两个数的和是 18. 于是，我们可以通过解方程

$$x+y=18,\qquad xy=77$$

求出 t 与$\frac{77}{t}$. 换句话说，同以前一样，我们可以设和为 18 的两个数是 $9-c$ 与 $9+c$（这里 c 也是任选的，可以用任何别的字母——除去 x 或y，它们会在这里引起混乱）. $9-c$ 与 $9+c$ 的积是 77，经过三步，可得 c 是 2：

$$\begin{aligned}(9-c)(9+c)&=77,\\81-c^2&=77,\\c^2&=4,\\c&=2.\end{aligned}$$

于是，两个数一个比 9 小 2，一个比 9 大 2，即 7 与 11.

这两个问题有一个共同的特征，这里 c^2 恰好为 4，在第一个问题里 e^2 恰好为 3. 有什么保证可以使这些平方数不会更小？我们怎么能有把握说这些问题的解总是存在的？不能！假设

$$m+n=12,\qquad mn=40.$$

按照同样模式，我们将 12 平分并希望 m,n 是 $6-k$ 与 $6+k$.

$$\begin{aligned}(6-k)(6+k)&=40,\\36-k^2&=40.\end{aligned}$$

如果 k 是实数，这是不可能的. 回想起第 15 章中问题 2(f)，这就

不奇怪了.如果两个数的和是 12,那么当它们两个都是 6 时,它们的积达到最大,这积是 36.如果数是实数,它们的积决不能是 40.

[115] 问题有解与无解的分界线应该划在哪里?临界的判定划在两个数的积,与和的一半的平方之间.因此,如果我们从方程

$$g+h=14, \qquad gh=49,$$

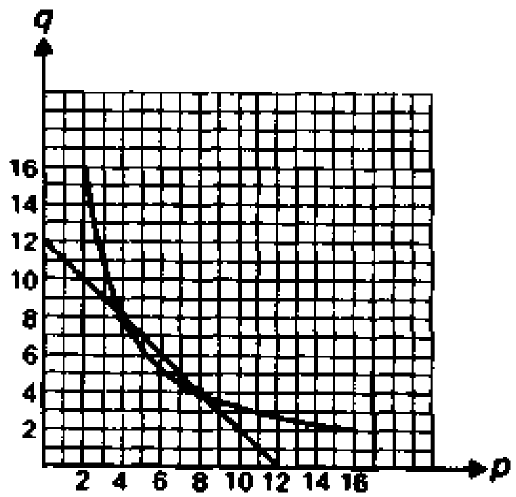
开始,其中 14 的一半是 7,而 $7^2=49$,我们应该处于边界本身了.真是这样.这个问题有唯一解,g 与 h 都等于 7.

这一章的讨论完全是代数的,没有出现任何一种几何形象.然而我们清楚地看到不仅有写在纸上的代数语句,而且看到各种可能性和想法,一系列步骤,好的步骤和坏的步骤,也没有忽略不可能性.当我们不仅按字面上的含义看,而且,打个比方,用心去“看”时,我们能真实地“看”到什么是不可能的.

在日常生活中,“看”的含义同样的含混并且丰富多采.近来的调查表明,“看”的最一般观念是真实地“理解”,如“我看出你的意思!”.并且在我写这个时我意识到“表明”的意思是“得出”或“证明”,这也是另一种来源于视觉语言的比喻.在使用代数语言时,图象是完全没有必要的,但这并不意味着它们不存在,或者它们不具有强的启发性,下面的一些问题将会做出说明.

问题

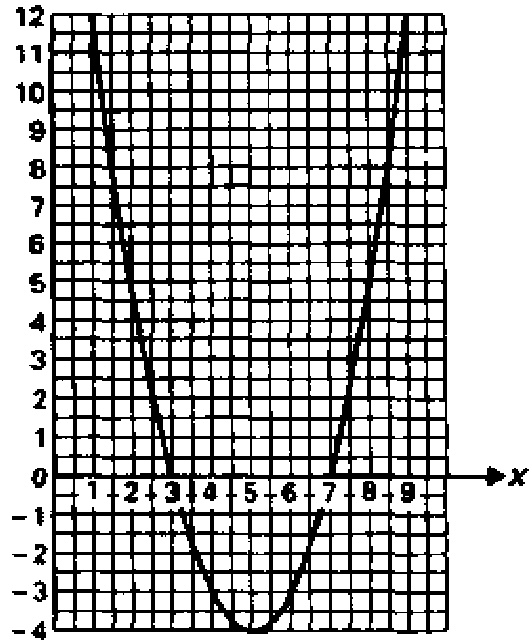
1.



满足 $p+q=12$ 的每对数 p 与 q 对应于这条直线上的一个点，满足 $pq=32$ 的每对数对应于曲线上的一个点. 有两个公共点，在这两个点 $p=4, q=8$，或 $p=8, q=4$，这时两个方程同时成立.

关于一条直线与这条曲线，什么样的几何事实对应于这类方程无解，一个解，或两个解？ [116]

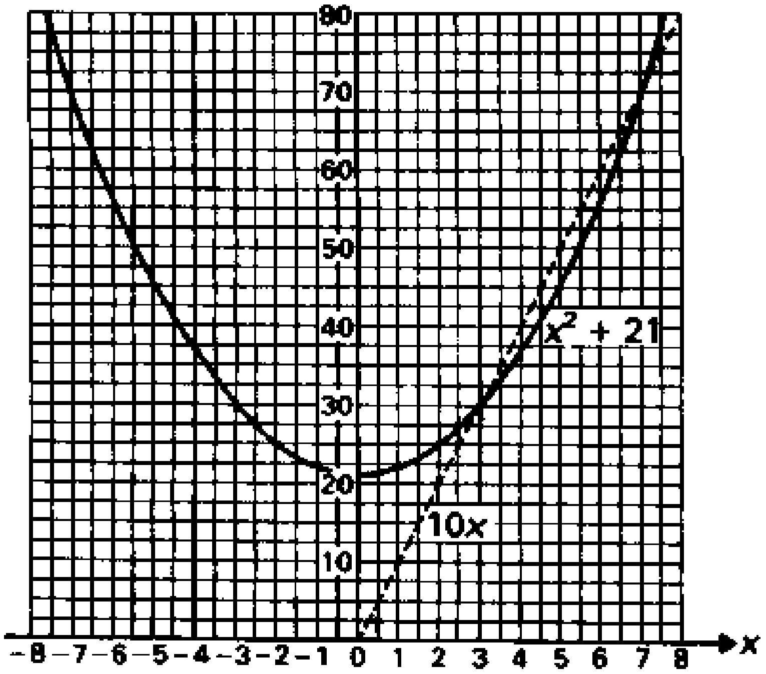
2.



这是一个 x^2+21 与 $10x$ 之间的差的图象，所以它实际上表示 $x^2+21-10x$ 的值. 当 x^2+21 与 $10x$ 相等时，它们的差是零. 这样的两个点，对应于 $x=3$ 与 $x=7$，已用小黑点标出.

图象的什么几何性质对应于这个事实：两个解的和，$3+7$ 等于 10?

3.



这个图象是 x^2+21 的值(曲线实际上是抛物线)与 $10x$ 值(直线). 当 x 是 3 或 7 时,它们取相等的值,对应的两点用小黑点标出.

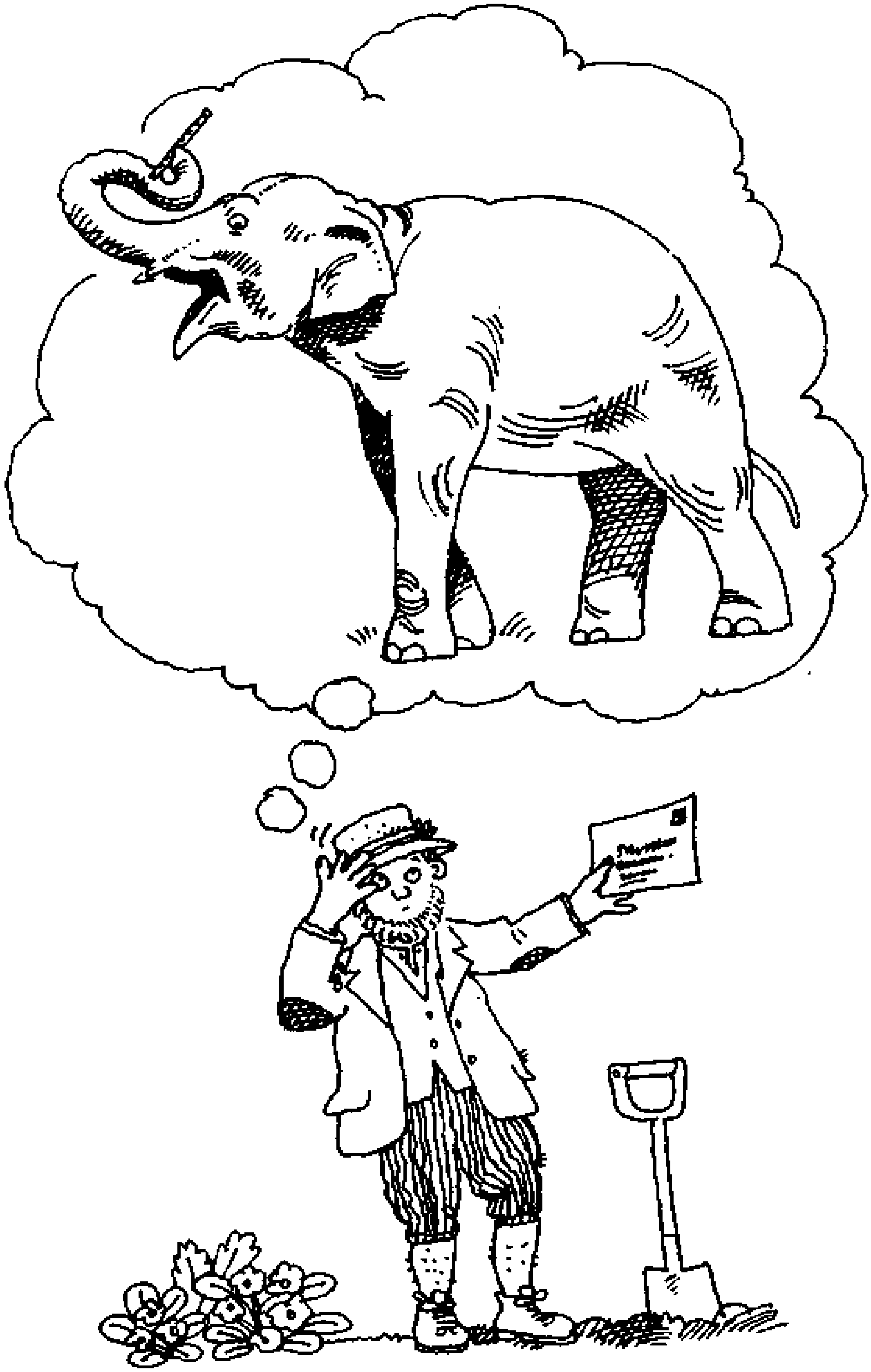
把 3 与 7 的积是 21 这个事实翻译成抛物线的性质.

4. 什么时候两个表达式 x^3+17x 与 $8x^2+10$ 相等? 什么数等于答数的和及答数的积?

5. 在问题 4 中,怎样由使 x^3+17x 与 $8x^2+10$ 相等的数算出 17?

6. 不存在实数 p, q 使 $p+q=14$ 且 $pq=50$. 利用等于 $\sqrt{-1}$ 的复数"i"有没有可能求出两个数满足这些方程?

[117]



第17章 模式与错觉

不是所有比喻都有启发性.一些很糟糕的诗歌填满了凭空的想象和牵强附会的比喻,没有什么真实的、有用的或有效的东西,只不过是诗人肆意的想象而已.

人的头脑易于预先认定相似之处,甚至在更细致的检查表示根本不相似的时候.最近,我惊恐地看见一辆汽车拐弯时撞到一只猫.我想汽车开过去后,会看见猫的尸体躺在马路上.我找了大约一秒钟.然后我的脑子重新解释所接受的信息,使我欣慰的是,我忽然发现我曾看得十分真切的"猫"是一张被风吹起的脏纸片.

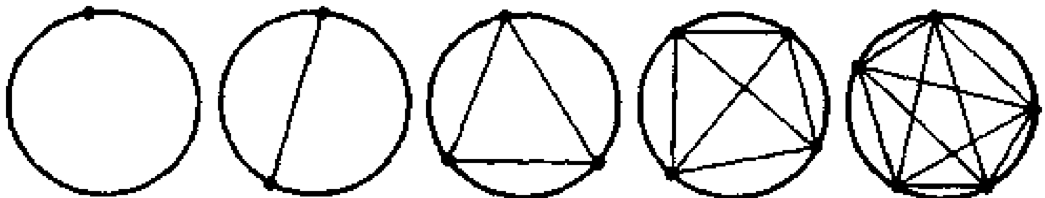
刘易斯·卡罗尔写过这首令人愉快的诗,开头是:

> 他以为他看到了一只大象,
> 大象在吹横笛;
> 他再看一看,却发现那是
> 一封他妻子的来信.
> "我终于领悟到",他说,
> "人间的辛酸!"

对孩子的谜语成年人宽容地付之一笑,可是他们却每天都从看语义双关的新闻标题中得到自己的享受,这种标题在报纸上十分流行,常常采用引人发噱的模式.大标题"军事技艺使你兴奋"几乎是一个谜语:"为什么军事技艺像兴奋剂?"差别在没有给出答案,希望你自己了解到"兴奋"这个词也当作使用药物.东方的

格斗技巧引起的心理激动是否有点相当于服用毒品的体验是不清楚的.这个标题可能是对热心于军事技艺的人的公然的诽谤.一些著名的报纸常称以小提琴手艾萨克·斯特恩(Isaac Stern)为首的四人乐组为"斯特恩帮",这实在是低劣的新闻噱头;原先的斯特恩帮是恐怖主义分子,而不是才华横溢的音乐家.

误导或完全错误的关系常常被数学家发现.在这些圆的每一个上,每一个黑点都与每个别的黑点相连接.每个圆被分割成多少块?

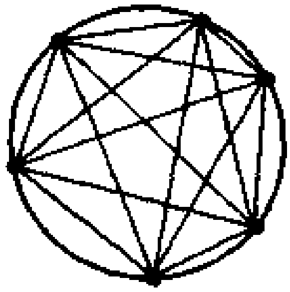


1　　2　　4　　8　　16

[119]

这个问题是数学家利奥·摩塞发明的,或许应该说成是"发现"或"找到"的.第一个圆仍是一块,因为单个点不能同任何别的点相连.然后块数增加:2,4,8,16,….

在五项之后,为了适合这个规律,下一项一定显然是 $2\times16=32$ 吗? 这可能是任何数学家的第一个念头,所以的确是"显然的".这又错了.

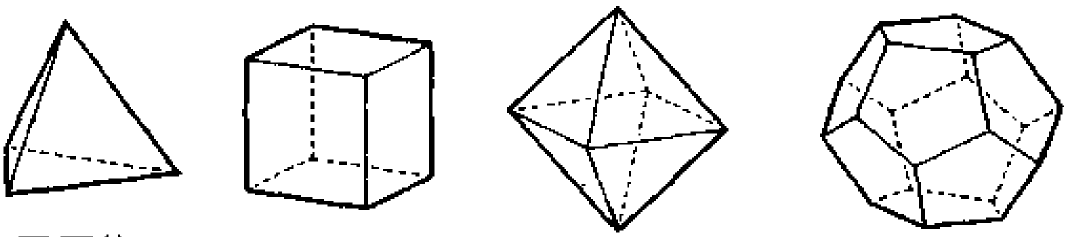


31

实际上,下一个数是31.再后面是57和99.公式似乎是:对 n 个点而言,有 2^{n-1}个不同区域.但关于区域数的真正公式是

$$\frac{1}{24}(n^4-6n^3+23n^2-18n+24).$$

除去刚开始几项偶然的相合外，毫无相似之处！



四面体　　立方体　　八面体　　十二面体

我们的头脑有一种对模式作“最简单的”解释的自然倾向．四种柏拉图立体，即正多面体，分别有4，6，8与12个面．有什么比猜想第五个正多面体有10个面更为自然呢？或者这个序列继续下去，有14，16，…个面？这是合情合理的，但又完全错了．有第五个柏拉图立体，二十面体，但它不是10个面而是20个面，并且在它后面再也没有别的正多面体了．那么，对数4，6，8，12，20没有其他公式了吗？有的，但那比“偶数数列”远为复杂了．

最伟大的数学家难以避免作错误的推广．皮埃尔·德·费马(Pierre de Fermat，1601—1665)创立了现代数论并证明了令人目眩的定理，如“一个素数是两个整数的平方和当且仅当它比4的倍数大1”．可是他也在现在称为费马数的问题上犯了个大错．[120]

费马注意到：

$$2^{2^0}+1=2^1+1=3,$$

$$2^{2^1}+1=2^2+1=5,$$

$$2^{2^2}+1=2^4+1=17,$$

$$2^{2^3}+1=2^8+1=257,$$

$$2^{2^4}+1=2^{16}+1=65537$$

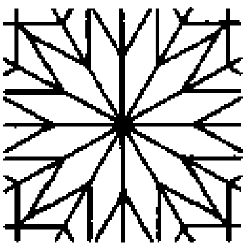
都是素数．他猜测 $2^{2^5}+1$ 与 $2^{2^6}+1$ 等等也应该是素数．他写信给

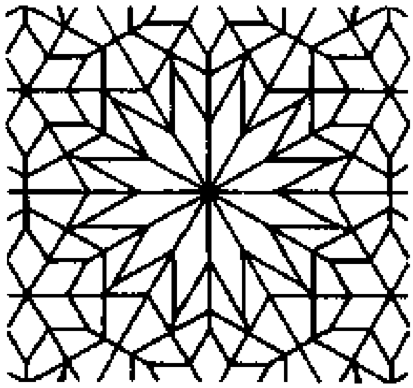
帕斯卡(B. Pascal, 1623—1662),“关于这个性质的真实性,我将回答你,但它不容易证明,而且我承认我还未能找到一个完全的证明.”

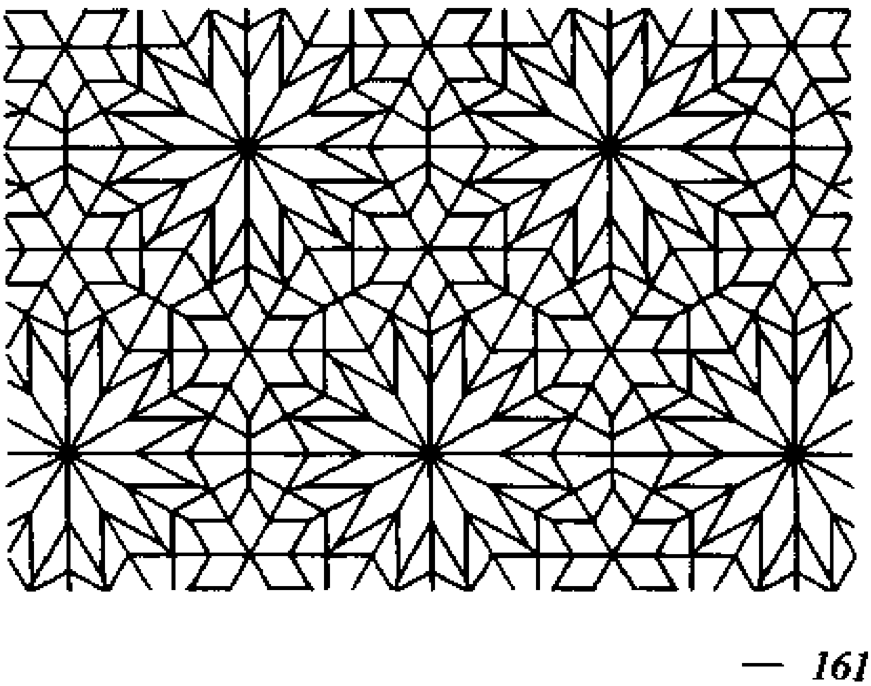
不幸,他错了.很可能整个地彻底错了.列昂纳德·欧拉(Leonard Euler, 1707—1783)发现 $2^{2^5}+1$ 不是素数:

$$2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297=641\times6700417.$$

一个世纪以后,兰德瑞(Landry)发现 $2^{2^6}+1$ 不是素数.接下去的数变得出奇地大,但数学家改进了他们的研究方法,从而发现后面九个现在被称为“费马数”的都是复合数.随着电子计算机的发展,研究继续进行下去,所探索的数已远远大于整个宇宙中基本粒子的总数,仍然没有发现素数.







问题常出在可用的信息太少.在这个设计的第一个图样里可以[121]看到几个图案?很少.在第二个图样里可以看到更多一些,但只有第三个图样才展示出完整图案,就这些啦?我们能确保这图案永远继续下去,不会变化吗?也许它只是更大的图案的一个部分?

希腊人定义完全数是任意一个等于它所有因子的和的数,这里因子包括1,但当然不包括它本身.于是,6是完全数,因为6=1+2+3.同样,28也是,因为28=1+2+4+7+14.

希腊人知道,前四个完全数是6,28,496与8128.不足为奇的是,他们被下述两个简单的模式所诱惑.看来1位的完全数一个,2位的一个,3位的一个,等等,此外它们轮流以6和8结尾.

发现下一个完全数是33550336,它被记录在一本中世纪的无名氏的手稿里.这破坏了第一个模式,但仍以6为结尾,支持了第二个模式.那么,也许第二个模式是正确的?不!现在已经知道30个完全数,它们的末位数字依次是6-8-6-8-6-6-8-8-6-6-8-8-6-8-8….已经证明,末位数字确实总是6或8,但也就这些了.不是吗?我们能排除有某种更深刻的模式的可能性吗?不,目前我们不能,我们只能推测.

素数比3的倍数小1或大1.在下面的素数表里,很明显,至少开始有比较多的素数比3的倍数小1:

2　3　5　7　11　13　17　19　23　29　31　37　41
43　47　53　59　61　67　71　73　79　83　89　97…

检验素数表就会得知这种优势延续过百位数并直到千位数.这的确是强有力的证据,说明这种模式是真实的并会永远延续下去!似乎是强有力的证据却不够强有力.有很多在小的数中存在的模式对较大数不成立,于是有时期望适合模式的“小”数能延续到更长一些.

现在的模式延续到几十万,到几百万,几千万,几亿,几十亿,直到非常大的数608981813029.这是个素数并且比3的倍数大1.这时大1的数第一次占多数.它们继续占多数直到

610968213796. 下一个素数是小 1 的，它后面那个数也是如此. 现在小 1 的素数又占多数，但不会永远如此. 已经证明在数列的很远处领先的地位改变无穷多次，这我们只能通过意志的练习作模糊的想象. [122]

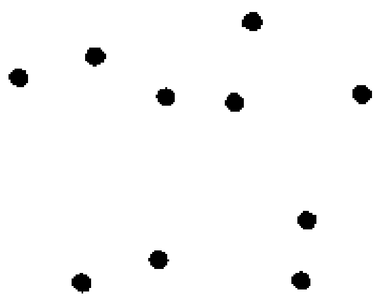
问题

1. 当 n 取值 1,2,3,4 时，表达式 $4n^3-18n^2+32n-15$ 等于 3, 9, 27, 81.

   当 $n=5$ 时，这个式子取什么值？

2. 把分数$\frac{1}{49}$表示成十进小数，开始几位是：0.0204081632. 这几对数字是 2 的前 n 次幂. 这个模式是真的，还是假相，仅仅是巧合？

3. 在这组点中有什么模式吗？



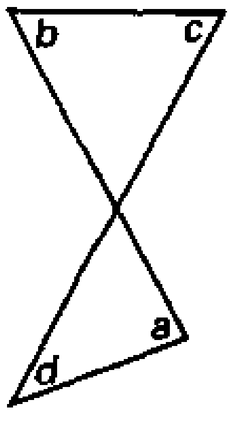
4. 这个等差级数从 5 开始，每次增加 12：

   5　17　29　41　53　⋯

   这个数列的各项都是素数吗？如果不是，为什么一开始有那么多素数？

5. 可以被分成两个三角形的四边形，内角和是 360°.

   然而，当四边形的两条边互相交叉时，这个规则似乎被破坏了. 在这个四边形里，标出的角，和仅近似于 250°. 能不能挽救原先的规则，使它可以应用于各种四边形？

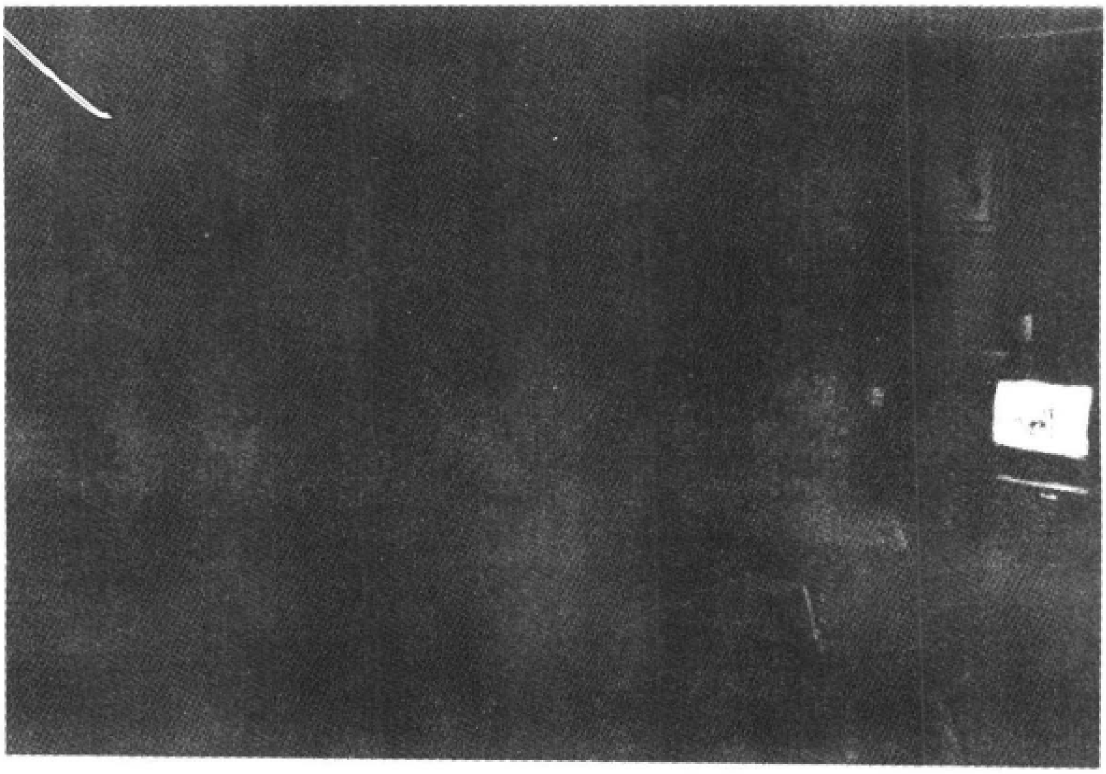


6.

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53
1 2 2 4 2 4 2 4 6 2 6 4 2 4 6
1 0 2 2 2 2 2 2 4 4 2 2 2 2 0
1 2 0 0 0 0 0 2 0 2 0 0 0 2
1 2 0 0 0 0 2 2 2 2 0 0 2
1 2 0 0 0 2 0 0 0 2 0 2 0
1 2 0 0 2 2 0 0 2 2 2 2 2
1 2 0 2 0 2 0 2 0 0 0 0
1 2 2 2 2 2 2 2 0 0 0 2
1 0 0 0 0 0 0 2 0 0 2

这个表中第一行是素数数列.第一行下面的每一行是前一行相邻两数的差的绝对值的数列.“绝对值”的意思是所有差取正值.

[123] 这个表,有什么明显的模式吸引了数学家的注意力?





[124]

第18章 清晰性，证明与确定性

为什么数学家如此相信他们的数学是正确的？为什么有时候他们又缺乏自信？第二个问题比第一个问题更好回答.

数学要处理许多关于无穷的问题.至少，自然数，一直延伸到无穷，而我们写出的数总是相对地小.伽利略(G. Galilei, 1564—1642)曾为这个难题大伤脑筋：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 …

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 …

第二行的平方数显然要比上一行的自然数疏朗得多.而且由于它们之间的间隔越来越大，平方数显然越来越疏朗.然而，伽利略注意到，对每一个自然数均有一个对应的平方数.从这一点看来，两个数列完全对等.怎样解释呢？

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots,$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}-\cdots.$$

两百年前，这样的级数曾经引起混乱.初看它们几乎是一样的.是的，它们几乎是一样的.相同的数相加，仅仅在数的次序上有一点小小的差别.然而这个差别却是十分重要的.第一个级数的和越来越接近极限 0.693…，而第二个级数的和趋近于极限 0.346…，后者正好是前者的一半.多大的差别！

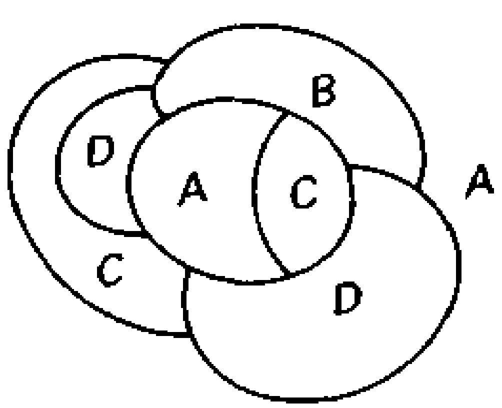
数学家商定不再谈论数列不停地趋于“无穷”，而用有限的

近似来解决这种级数的求和问题.然而,这并没有摆脱所有的无穷问题.例如,巴拿赫(Banach,1892—1945)和塔斯基(A.Tarski,1902—1983)证明了可以把一个只有豌豆那么大的小球分成有穷块,它们可以拼起来做成一个大得多的球,可以做成太阳那么大.

不用说,他们的分法不是把小球分成具有确定体积的实心小块.世界性的饥饿问题不可能通过把一颗豌豆切碎再重新拼起来做成一颗一英里宽的豌豆来解决!他们的技术很像伽利略的难题,在这个难题里,平方数奇迹般地同自然数一样多.如果在几何球面上没有无穷多个点,巴拿赫—塔斯基悖论就不成立. [125]

近年来不确定性的来源更多了.强有力的计算机的出现加剧了这种状况.由于越来越多的数学家处理越来越复杂的问题,甚至用几百个小时的计算机时间来帮助他们计算,其他数学家很难跟踪他们在做的事情.

四色猜想说,很简单,只包含有限多个区域的平面或球面的地图可以用四种颜色染色,使得没有两个相邻区域有相同的颜色.这个问题是弗朗西斯·格斯里(Francis Guthrie)于1852年发现的,起初显得相当简单.若干个"证明"发表了,但都有根本性的错误.



直到最近,哈根(Wolfgang Haken)和阿派尔(Kenneth Appel)

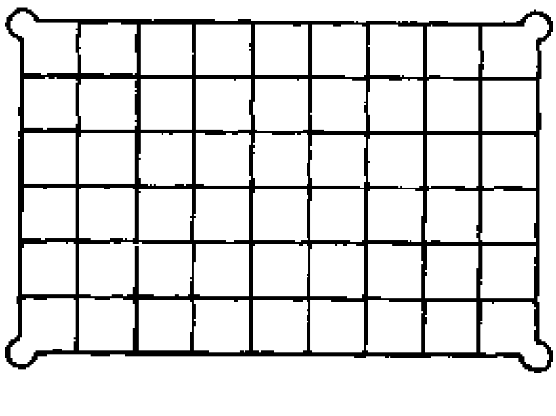
用计算机程序检验了400个不同情况，才成功地证实了四种颜色是足够的．检验是成功的，哈根和阿派尔发表了他们的“证明”，当然不会有计算程序的所有细节，那是可以写成厚厚的一本书的．

其他数学家相信他们吗？是的，他们相信了，但他们不会不注意到这“证明”是非常奇特的，并且树立了一个危险的先例．数学家不接受藏在其他数学家头脑里的证明．在其他数学家喊出“够了！我们不信服！把它写在纸上，让我们自己来看吧！”之前，可以在计算机里进行多少步证明呢？

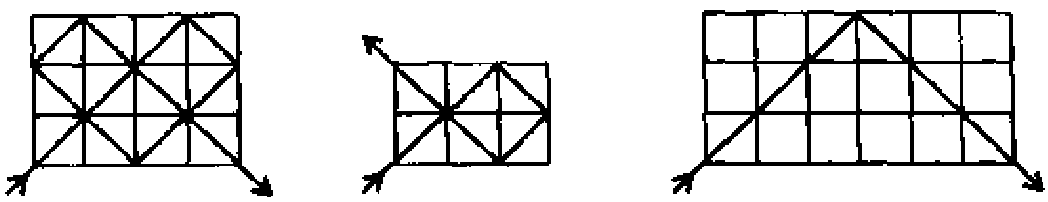
数学中那些最令人信服的论证简洁地避开无穷的神秘性，它们是哈根与阿派尔的证明的对立面．对于想从头到尾详细弄懂的其他数学家，它们足够短．它们对问题作一鸟瞰，把各个部分恰当地放在一起，每一处的连接都是清楚的，令人信服的．这样的效果是可以让读者说：“当然！现在我看懂了！”

这台球问题中，一张长方形桌子被分成正方形的小格，四角有袋子，但边上没有袋子，一只台球从一个桌角以45°角打向桌边，经过桌边橡皮垫子的反弹，直到……发生什么情况？这球会在桌上永远弹来弹去吗？会落到袋子里去吗？哪个袋子？要多长时间才落进袋子？它的运动模式总是一样的吗？它撞每一边的次数都相同吗？它会……？

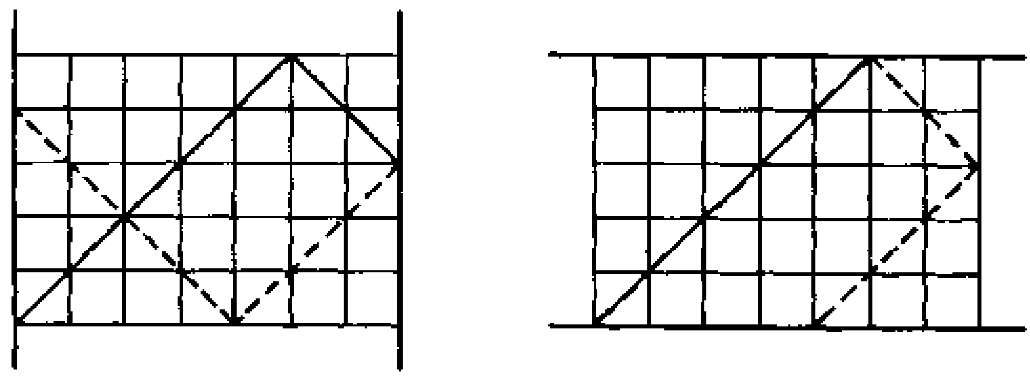
[126]



怎样回答这种问题？先考虑一个特殊的问题，球运动的路线的长度为什么有很多变化，怎样变化？我看到的最简单的答案是一个 13 岁的男生沙姆沙特·欧珊(Shamshad Ersan)告诉我的. 解答很短，它清楚地解释了发生的事，一点不奇怪，它用了一种不同的、独特的方法看这个问题.



只有矩形的边长没有给定. 用不同的选择做实验，总是良好的开端，我们可以获得种种可能的直观想法. 似乎球一定会落到袋子里，它决不是球出发的那个位置，但球运动路线的长度和形式会以很奇特的方式变化.



先看 7×5 的矩形. 不要去看球从一条边弹到下一条边，再下一条边……，而改为看球在左右两边之间的运动. 每从一边到另一边球必定走过 7 个单位(小正方形的一条对角线算作一个单位). 如果球最终落到一个袋子里，它走过的路程是 7 个单位的倍数.

现在看第二个矩形，这次观察球在上、下两边之间的运动.

从一边到另一边是5个单位，不管它在行进过程中是否撞到左右两边．如果它最后落到一个袋子里，它走过的路径是5个单位[127]的倍数．

作一个表表示球走过1，2，3，4，…次桌子的长与走过1，2，3，4…次桌子的宽后所通过的距离：

0	5	10	15	20	25	30	35
0	7	14	21	28	35		

在走过35个单位之后——在此之前这是不会发生的——它恰好完成了长与宽的一个整数倍，必定落到一个袋子里．多么简单，多么令人信服，多么清晰啊！

（我听到你问球落到哪个袋子？那是另一个问题，沿用沙姆沙特·欧珊的方法也不难解决．）

问题

约翰·威尔逊（John Wilson，1741—1793）因威尔逊定理而获得极大赞誉．他是英国的数学家和律师，他通过个别例子的检验相信这个定理是正确的，但却不能证明它．

定理首次发表于1770年，几乎立刻就被伟大的法国数学家约瑟夫·路易斯·拉格朗日（Joseph Louis Lagrange，1736—1813）证明．

带有嘲讽意味的是，藏在汉诺威图书馆里的手稿，表明莱布尼兹（G．W．Leibniz，1646—1716）早在一百多年前就知道威尔逊定理．数学与科学一样，没有发表他们的发现的发明者，得不到应属于他们的荣誉．

定理的陈述很简单．取任一素数，如11．把小于11的正整数乘起来再加1：

$$10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1+1=3628801,$$

威尔逊定理说，这个总数能被原先的素数11整除．事实上，$3628801=11\times329891$．

拉格朗日证明了逆定理也成立．如果这答数被原先的数整

除，那么原先的数必是素数.

下面的一系列问题逐步导出威尔逊定理.这些问题中有几个采用前一个问题的解.因此，在考虑后一个问题之前应该把前面的解法弄懂.如果解决了这一系列的问题，那么，到问题6结束，威尔逊定理就显得惊人的自然，意外的清晰！

1. 构造一张0到5的乘法表，然后重写这份表，将表中的每一项换成它除以6后得到的余数.例如 $5\times5=25$ 应当换成1. [128]

   对0到6作同样处理，每一项换成它除以7后所得的余数.

   表中各数有什么联系？6和7各属于哪一类数？

2. 属于高等算术的第一个定理说，如果素数 p 不整除 m 或 n，那么，它不整除乘积 $m\times n$.这个定理可能看上去是显然的.实际上，可以证明它，但我们假定它是对的.

	6	9	1	4	7	10	1	4	7	
	8	1	5	9	0	4	8	12	5	

   好，假定这个定理正确.从乘法表中 mod 11[①]得来的这两行一定有错误，为什么？

3. 为什么由问题2可得出如下结果，在乘法表的每行与每列 mod 11，小于11的每个数恰好出现一次？

4. 在每张表的长对角线上，数1出现两次，一次在上端，这里 $1\times1=1$；另一次在下端，这里 $5\times5=1$ mod 6，或 $6\times6=1$ mod 7，或 $10\times10=1$ mod 11.

   为什么1不可能出现在长对角线上的其他地方？

5. 如果 p 是素数，怎样能把从2到 $p-2$（包括这两个数本身）

① 即将乘法表中各个数换成它们除以11后所得的余数.——译者注

的所有数配成对,使每一对数的乘积是 1?

6. 如果 p 是素数,从 1 到 $p-1$ 的所有数的积 mod p 后是什么? 怎样由此导出威尔逊定理?

[129]

对问题解答的提示

引言

1. 将原正方形放入一个较大的正方形中.
2. 假定立方体非常大.
3. 怎样才能经过两次移动把盒底的左下角移到盒底的右上角?
4. 选择在 153 与 482 之间的一个整数.
5. 都能.如何得来?
6. 试一试,再看看.

第 1 章

1. 一个五边形分成三个三角形.
2. 一个 n 边多边形可以生成 $n-2$ 个三角形.
3. 后两个.怎样得知?
4. 每个六边形是一个立方体的外廓.
5. 大三角形可以用较小的三角形的复制品完全填满而不留空白.
6. 想象三角形被小等边三角形的精细的拼花覆盖.

第 2 章

1. 把两个拼花图互相垂直地重叠.
2. 或者用希腊十字做一个拼花,或者像国际象棋那样,走马步.
3. 对角线.

4. 用正方形卡片做模型,进行实验.

5. 用六边形和三角形卡片做模型,进行实验.

[130] 6. 比较题 3.

第 3 章

1. 一个正四面体有三对对边.

2. 把角切去,确切地说,在哪里切?

3. 从立方体切下来的一个切块,体积是整个立方体的$\frac{1}{6}$.

4. 如果两个立体有相同形状,但其中一个在每一个方向上的尺寸是另一个的两倍,那么,较大的那个体积是较小的那个的 8 倍.

5. 用立方体的乳酪或生土豆做一个模型.

6. 做一个模型,进行实验.

第 4 章

所有六个问题只有一个提示:“试一试再看看!”在问题 4 中,这需要用一些目测,并用手画一画,或用圆规画弧,以一点为圆心的弧的半径是以另一点为圆心的弧的半径的两倍.

(承认这六个问题的解之间有强有力的联系也许是最合理的.)

第 5 章

1. 将每个顶点换成一个小正方形,小正方形的顶点在原先拼花的边上.

2. 当你挪开六边形时,在六边形的边之间能填入的正方形的个数依赖于六边形被挪开多远.

3. 围绕每个顶点,正六边形与等边三角形的哪些组合可以拼得出来?

4. 试一试,再看看.
5. 试一试,再看看.
6. 如果有六边形砖,它必定包含 6 个三角形,每种一个.五边形必定包含 3 个三角形,四边形必定包含 2 个三角形.

第 6 章

1. 取一对全等三角形,不翻转,将它们边对边地连接起来.由此开始拼花.
2. 仿照问题 1 的提示,取一对全等四边形,不翻转,将它们边对边连接起来.
3. 阿拔尔·瓦发图上面的边恰好与另一个图底下的边重合.
4. 切下两个三角形,用麦杆或类似的东西将它们排成,在透视上来自 X 点,但要使这两个三角形不在同一平面内.
5. 无提示.
6. 通过求差,尽可能地完成同一个模型.如果模型完成了,两个 6 将出现应当有的、全是 6 的那一行上. [131]

第 7 章

1. 必须考虑有洞的三维图形,如带把手的茶杯或圈饼.
2. 角.
3. 三点共线.
4. 无提示.
5. 用前面的数的若干不同对做试验.
6. 用若干不同的三角形做试验.

第 8 章

1. 用第 1 章的结论,一对对角和是 180°.
2. 用一个圆做试验(撇开一对直线不说),圆是最容易画的圆锥曲线.

3. 越变越大的三个圆在极限情况下变成三角形的边.
4. 画一画,看一看.
5. 矩形的对边相等,两条对角线也相等.
6. 当三个相似三角形退化成线段时,它们变成被分成相同比的线段.

第9章

1. 从左端开始相加:

$$1+10=11,$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10,$$
$$10+9+8+7+6+5+4+3+2+1.$$

2. 试把这图转半圈.
3. $\frac{1}{4}$是$\frac{1}{2}$的一半;$\frac{1}{16}$是$\frac{1}{8}$的一半;如此等等.
4. $(2+1)=3$.
5. 这个图可以画成非常对称的正方形.
6. 序列中的小块都成L形.

第10章

1. 无提示.
2. 树的端点与分支点必须算在一起.它们都是边的端点并且对应于地图的顶点.
3. 把两个点中的每一个与图象的原点连接起来.
4. 把第 n 个平方数 n^2 写成$\frac{1}{2}(2n^2+0)$.
5. 用更多的肥皂泡和更多的边做实验.
6. 无提示.

第11章

[132] 这些问题都没有提示.

第 12 章

1. 给 A 的重量必须是给 B 的两倍.
2. 从点(6,1)到点(16,7)是 10 右 6 上.
3. (3,2).
4. 画一个图,也可能会帮你求出每一对点的"平均".
5. 给两点的"平均"的重量必须是给第三点的两倍.
6. 除去点(10,4),其余都在.为什么?

第 13 章

1. 从每一个原先重量中取出 1 千克重,并问这两个分出的 1 千克重会在哪里达到平衡?
2. 把 2 千克重分成两个 1 千克重,对称地放,在 2 千克重的原先位置上取得平衡.
3. 任何一对重量等价于在它们连线的中点上的 2 千克重.
4. 点(3,2)与点(7,4)之间的中点怎样计算?
5. 把木条放在楔形支承上,使它几乎达到平衡,但不完全平衡.
6. 从 9 千克重中取 4 千克重重新配置.

第 14 章

这些问题没有提示.

第 15 章

1. 杜登尼把这个解法称为他的"钮扣与线"法.
2. 无提示.

第 16 章

1. 所有满足 $p+q=?$ 的点所形成的直线都平行于图中的直线.

2. 如果两个数的和是 10,那么它们的平均是 5.
3. 从几何上讲,3 与 7 是抛物线和直线的两个交点到抛物线的铅直的对称轴的距离.
4. 存在三个小于 10 的整数,它们使 x^3+17x 等于 $8x^2+10$.
5. 用问题 3 的三个解所做的计算必须是对称的.例如,如果这三个数是 p,q 与 r,那么,$p^2+q^2+r^2$ 似乎是合理的(虽然不正确),因为它是对称的,而不对称的 p^2+qr 则不予考虑.
6. 像 $(4-i)(4+i)$ 这样的积等于 $4^2-(i)^2=16-(-1)=16+1=17$.

[133]

第 17 章

1. 这值不是 $3\times81=243$.
2. 模式是真实的,但不是开头那样简单的方式.
3. 是的.
4. 所有素数都比 6 的倍数大 1 或小 1.
5. 将顺时针旋转的角作为正的,逆时针旋转的作为负的.
6. 每一行差数的第一个数总是 1.关于这一点有什么理由吗?

第 18 章

1. 有两个乘法表,表中的数分别是乘积被 6 与 7 除后的余数.

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

×	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

2. 第一行包含数 1,4 与 7 各两次.为什么模 11 的乘法表中,任

一行同一个数不可能出现两次?

3. 每一行有多少个小于 11 的数?

4. 长对角线上的任一个数,是一个数自乘,即是完全平方.

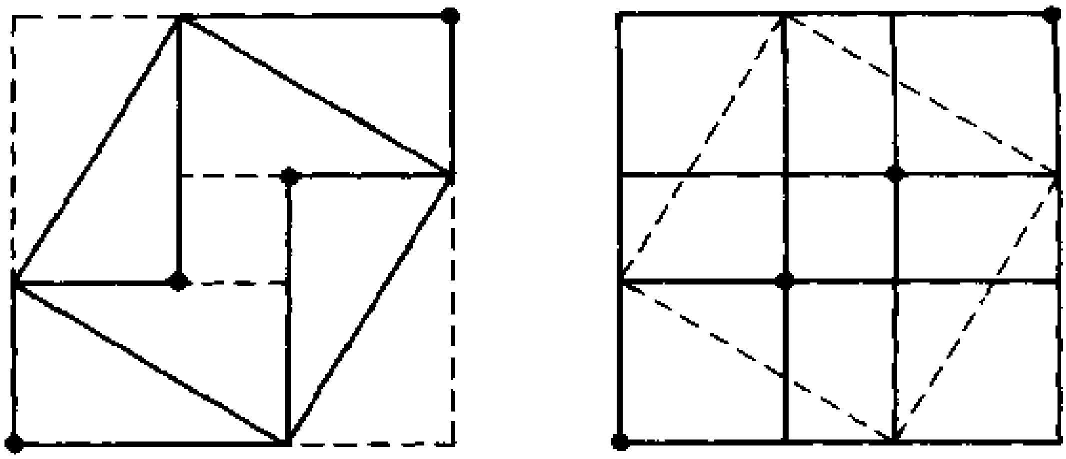
5. 在第四行,哪对数产生 1?

6. 比较问题 5,例外的数是 1 与 $p-1$. [134]

问 题 解 答

引言

1.

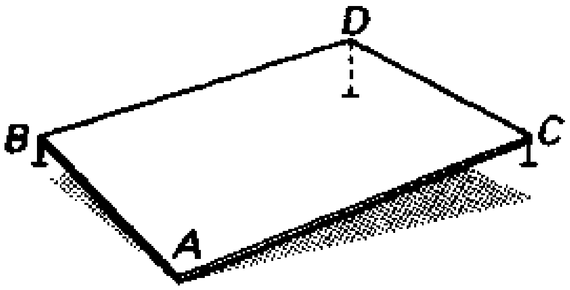


再加 4 个三角形(在第一个图中用虚线表示),原先的图变得对称多了.在第二个图中,完整的图形,对称性更加清楚,其中四个标出的点显然在大正方形的对角线上.

2. 六个面,如果立方体足够大,而且你呆在立方体里面的一个角落上.(试站在一间大的长方形房间的一个角落上;你能看到所有六个面.)

3. 离桌面最远的顶点,高度等于其他两个顶点的高度的和.

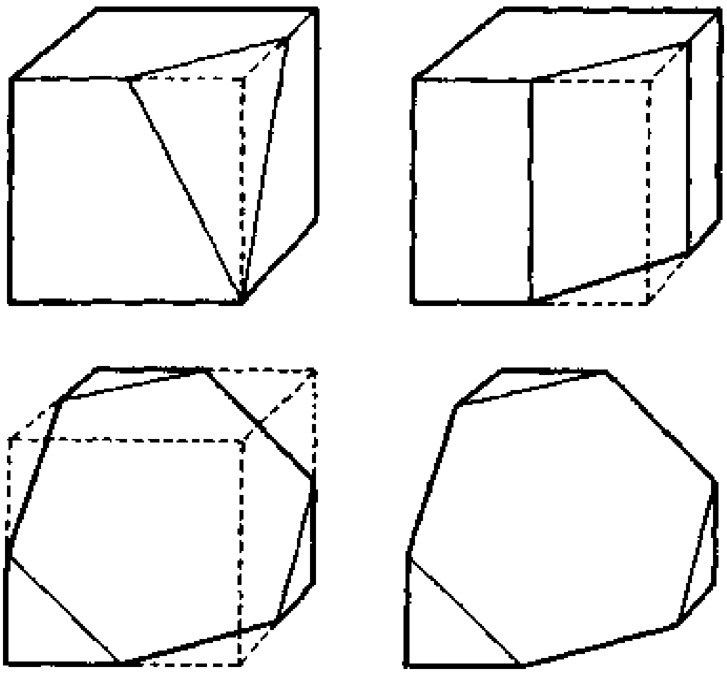
这个图只画出盒底.AC 与 BD 是平行的,所以从 A 移到 C 或从 B 移到 D,升高相同的量.从 A 移到 B 与从 C 移到 D,情况类似.从 A 到 B 与从 A 到 C 的升高的和等于从 A 到 D 的升高.



4. 想一个合意的在 153 与 482 之间的整数，譬如说 200. 从 153 到 200 是 47，从 200 到 482 是 282. 把 47 与 282 加在一起，总"距离"是 329.

（这样相加，是弄懂减法的最容易的方法. 当店主找钱给你时，实际上就用这个方法.） [135]

5.

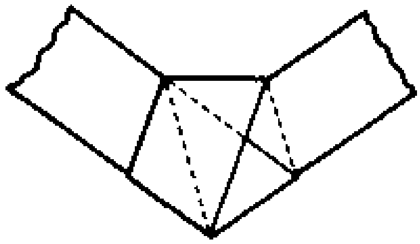


都能. 这些图告诉你怎样切. 三角形可以在任一充分大立方体上切出来. 能切出所述矩形的立方体大小只有一种.

正六边形可以用四种方法切出来，它们互相等价. 正六边形的六个顶点是立方体六条边的中点，并把立方体平分成

相同的两半.

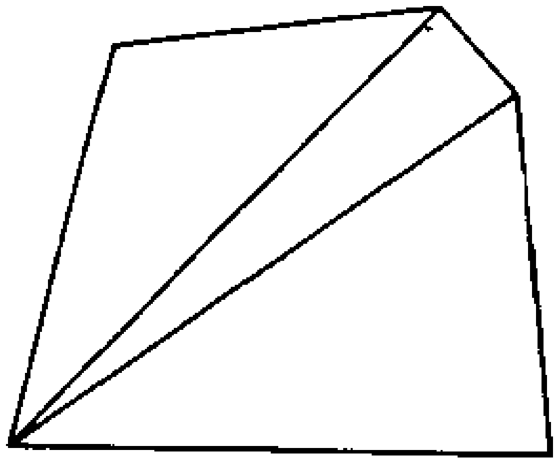
6.



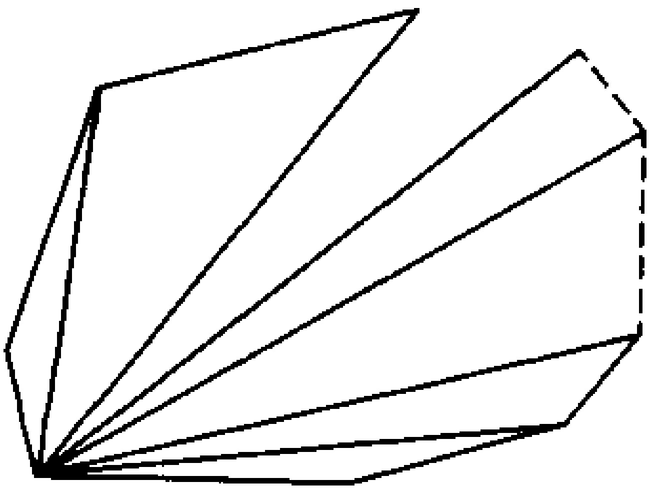
把结展平同时轻轻地拉开两端,这个正五边形就出现了.

第1章

1. 任一凸五边形生成三个三角形,内角和为6个直角,即540°.

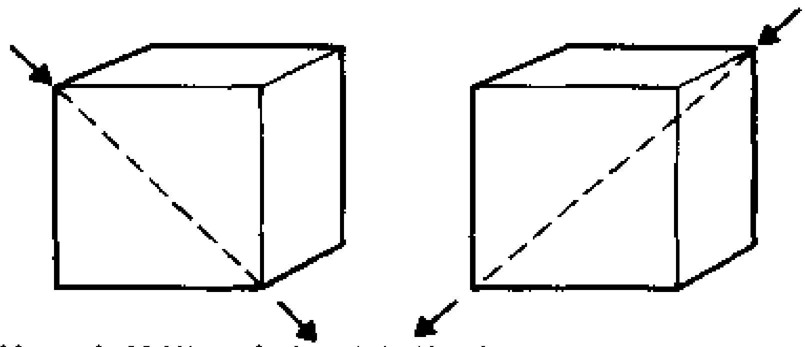


2.



一个 n 边的凸多边形生成 $n-2$ 个三角形,内角和为 $2n-4$ 个直角,即 $(180n-360)°$.

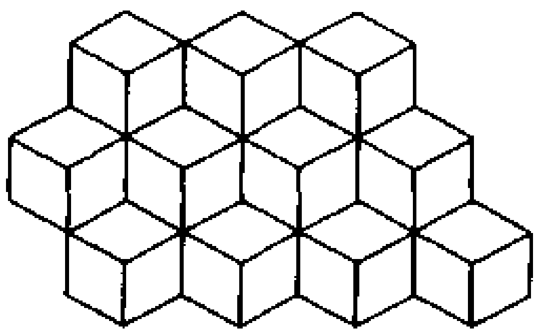
3. 第三个①是立方体的影子，沿一条面的对角线看(如左图所示).



第二个是沿一条长对角线看的影子，如右图所示.

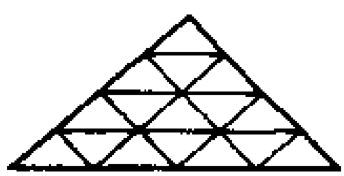
第一个影子在比例上长比宽大得多，所以它不是任何方向的影子.可从通过从一条边上切下一段而切出立方体的长而薄的矩形截面，但这些窄窄的截面并不投射出不同的阴影.

4.



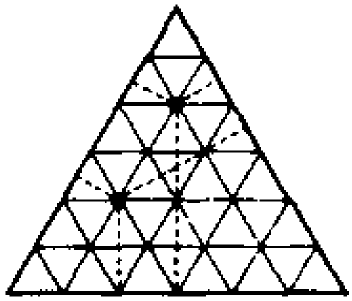
每个六边形是一个立方体的外廓.整个堆看上去就像这样，当你的头脑不能判断特定的立方体是进入纸面或从纸面出来时就产生一个众所周知的视觉错觉.

5. 可以装十六个较小的三角形，如图：



① 原文将第二、第三搞颠倒了，我们作了更改.——译者注

6. 考虑这个三角形内的这些点.它们选在位于三角形网格的交点上,因而从每一个点到边的距离是一个小三角形的高的倍数.

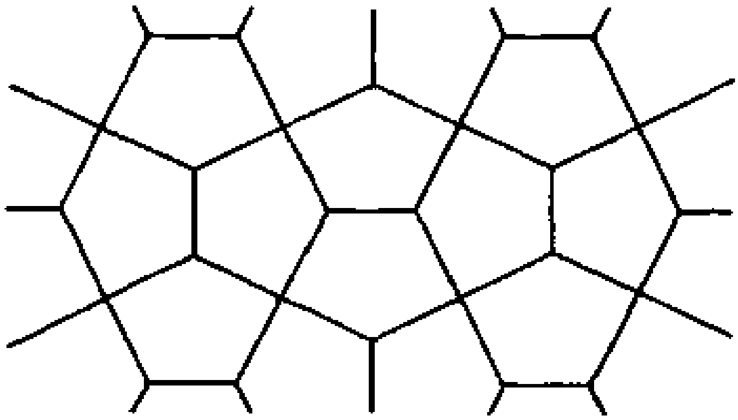


进一步说,当从一个点移向另一个点时,距离的总和不变,因为这两个点位于平行于一条边的直线上.而至多两次沿着平行于边的线移动,总可以从网格的一个交点移到另一个交点.于是,只要点选在网格的交点上,线段的长度和就不会改变.由于网格要多细就可以多细,所以网格可以任意接近三角形内任两个点,于是,不管两个点被选在什么地方,结论都成立.

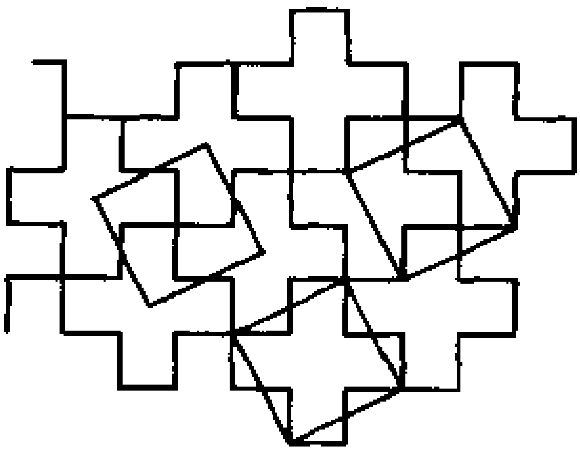
[137]

第2章

1.

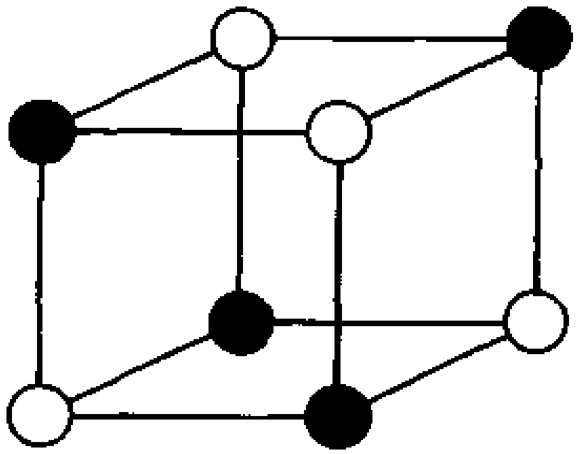


2.



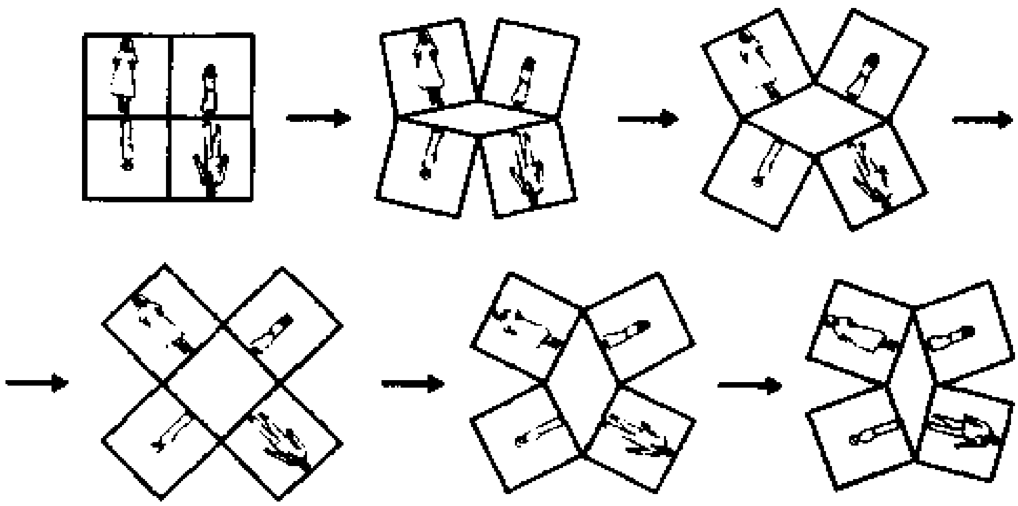
做一个拼花,然后把任意一组来自四个相邻希腊十字的对应点连接起来,如这个图所示.

3.



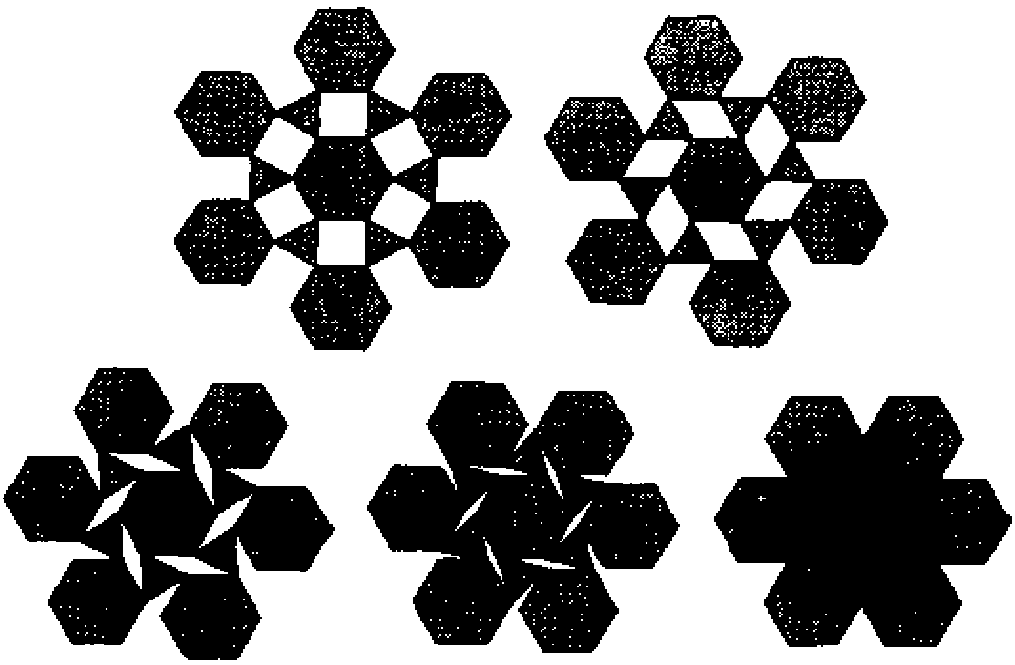
显然,两种颜色可以轮换. [138]

4.



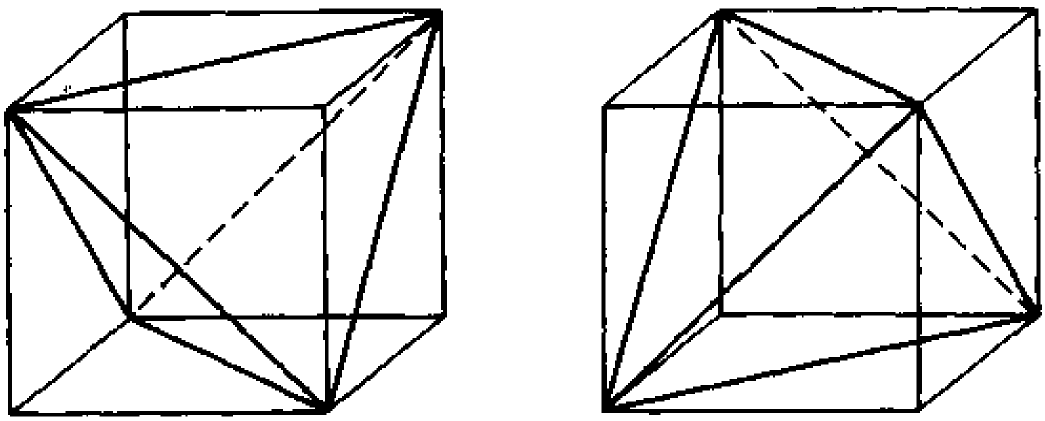
这个图显示了正好四个相邻正方形的运动.整个正方形拼花以相同方式运动.

5.



这个图显示了 n 个六边形怎样绕一个六边形运动. 整个拼花以同样方式展开,然后又合拢,如问题 4 的正方形.

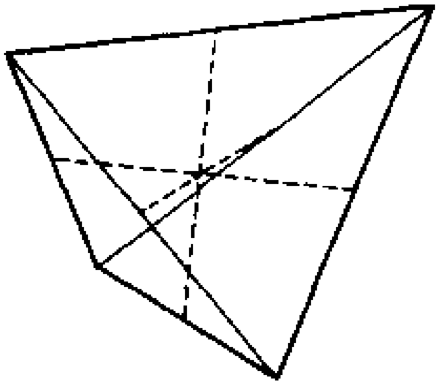
6.



在一个立方体内可以内接两个四面体,根据选取哪一组(面的)对角相对的顶点作(四面体的)顶点而定.

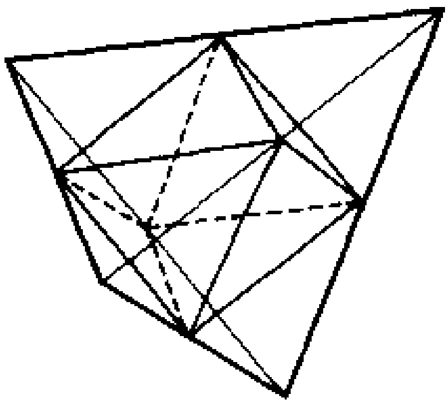
[139]

第3章 1.



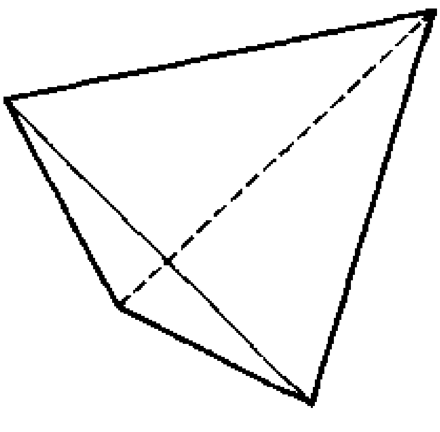
轴连接对边中点.如果四面体是像第2章问题6那样,由切去立方体的角而得到的,那么,四面体的这三条轴是立方体对面中心的连线.

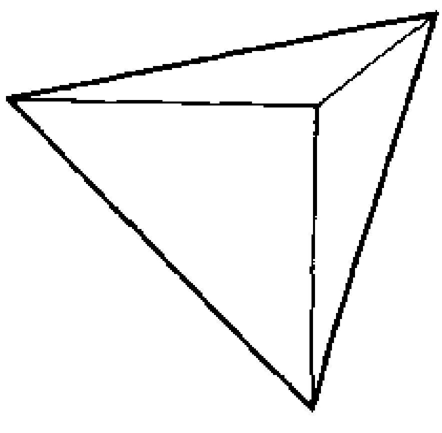
2.



通过边的中点,切去四个角.

3.





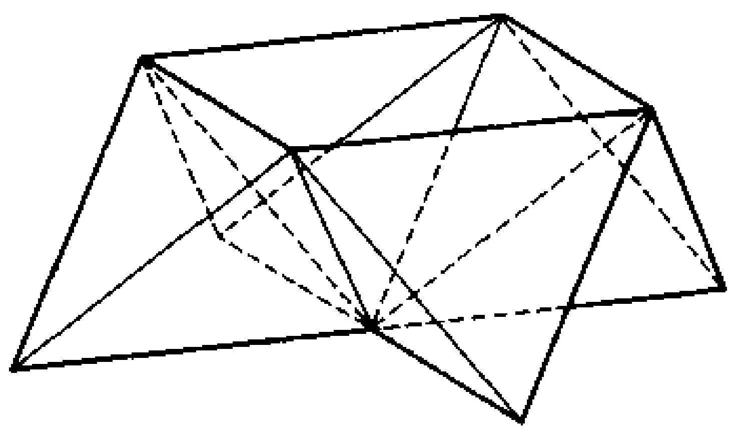
这是四面体与在形成四面体时，立方体切下的4个棱锥中的一个. 每个棱锥有立方体的半个底面，所以它的体积是整个立方体的一半的三分之一，即$\frac{1}{6}$. 因此，四个棱锥合起来是立方体的$\frac{4}{6}$，从而，四面体是余下的$\frac{2}{6}$，即立方体的$\frac{1}{3}$.

4. 如问题2,切下角产生5块.每个小四面体是原先四面体在每个方向上的一半,因此体积只有$\frac{1}{8}$.

于是,四个小四面体正好拼成原四面体的一半,中间的八面体构成其余的一半.把八面体同一个小四面体比较,小四面体与八面体的棱长相同,体积的比是4∶1.

[140]

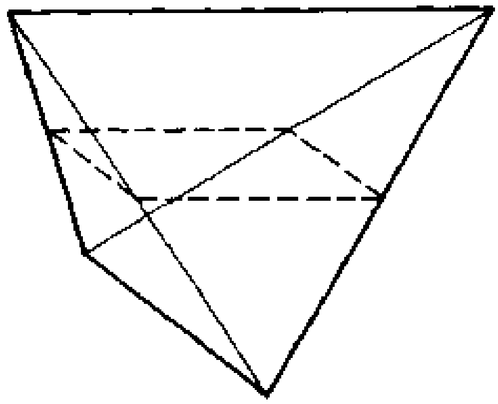
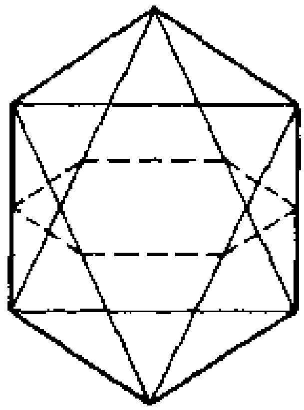
5.



这里是内接于4个相邻立方体的4个四面体.造成的空洞是一个棱锥,并且是半个八面体.在上面一层加上去以后,构成一个完整的八面体.

6. 使正四面体的一对对边平行于桌面,然后在一半的地方水平地切开.截面是一个正方形.

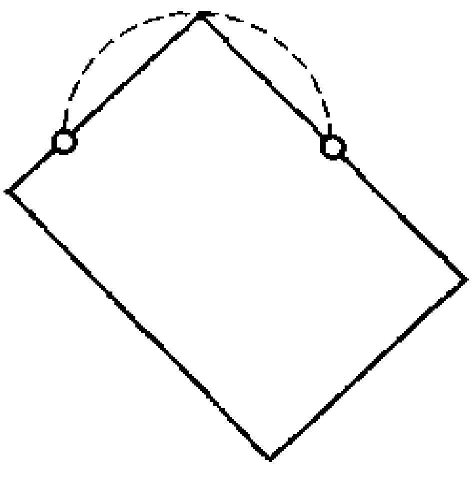
由于有三对可以选来使用的对边,所以有三个可能的正方形截面.

类似地，将八面体的一面放在桌面上，然后在一半的地方水平地切．切到六个面，产生一个正六边形．有四种方法安放八面体，所以有四个六边形的截面．

第4章

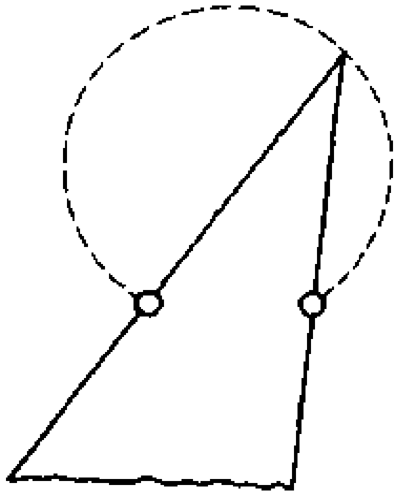
1．



纸片的一个角画出半圆．图钉所在的点是直径的两个端点．

把一只圆规的一只脚放在两个图钉连线的中点上（它就是半圆的圆心），很容易检验它的确是圆．

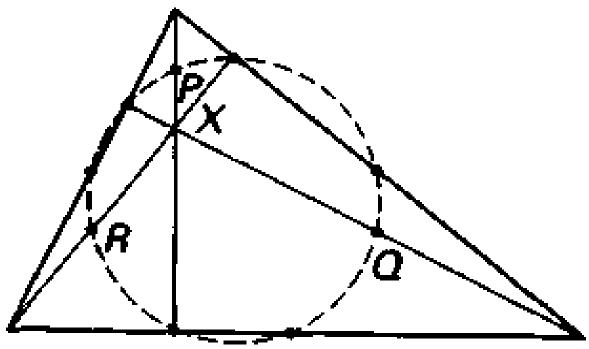
2.



顶点画出圆的一部分.如果这角度小于直角,画出比半圆大的圆弧,如果大于直角,画出比半圆小的圆弧.

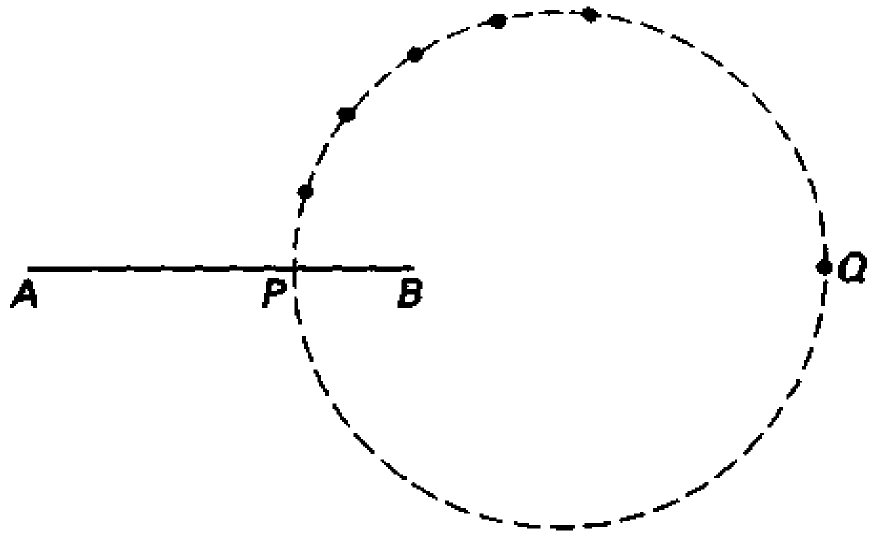
通过试验,十分精确地求出圆心,你就能确认,它的确是圆.

3.



九点共圆.这个圆的圆心是点 X 与外接圆(过三角形三个顶点的唯一圆)圆心的中点,它的半径是外接圆半径的一半.

4.



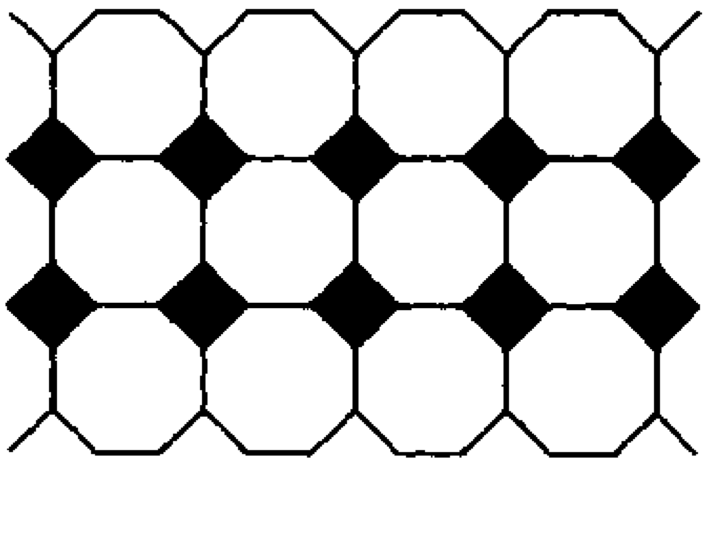
这些点都在一个圆上.在这个图中,A,B 连线上符合条件的两点是 P 与 Q.圆心是 PQ 的中点.

5. 当绳子在笔直的海岸线上形成半圆时,安尼斯圈出最大的面积.

6. 在四个顶点共圆时,四边形的面积达到最大值. [142]

第5章

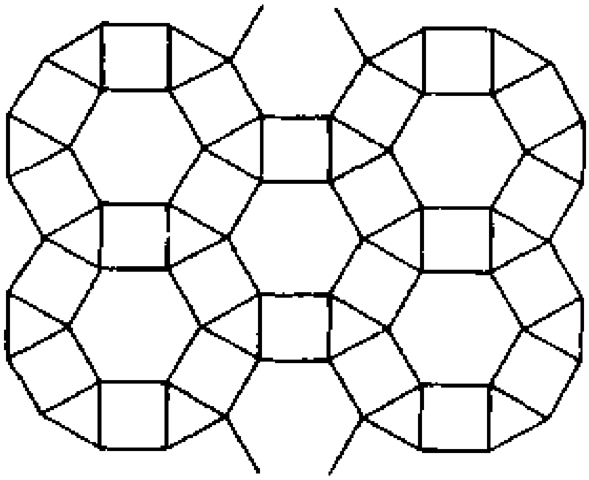
1.

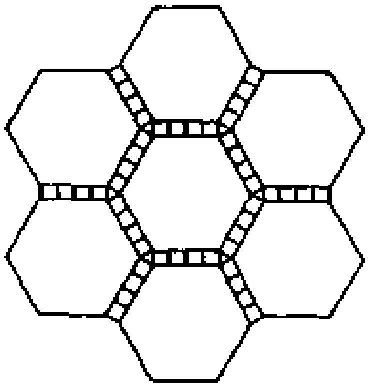


"切去"恰好合适的量,每个顶点被一个正方形代替,正

方形与正八边形的拼花就出现了.

2.



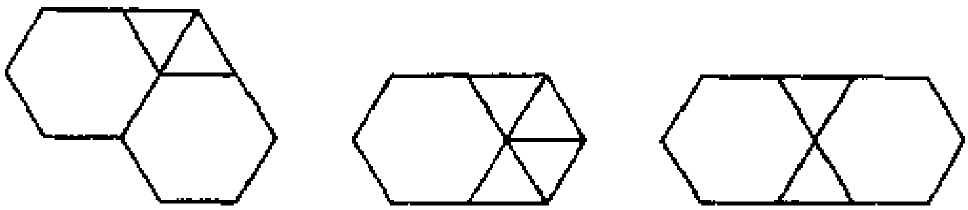


把六边形移开,移开的距离等于边长,在每对六边形之间可以填入一个完整的正方形,它的顶点之间的空间填上一个等边三角形.

然而,把六边形移开适当小的量,可以填入若干个正方形,事实上可以填两个以上的任意多个正方形.这图显示在每对边之间有四个正方形.另一方面,把六边形移开更多,可以填入一行正方形与这行成直角.

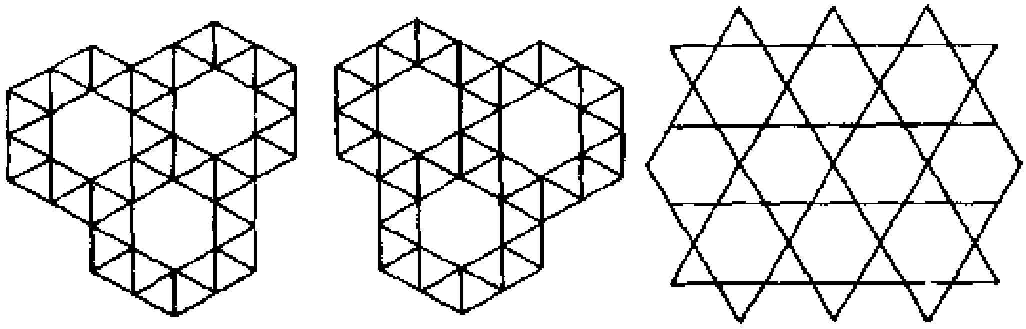
只有第一个解的图显示出一个半规则拼花,其中相同的正多边形按相同次序围绕着每一个顶点.

3.



恰好有三种方式使正六边形与等边三角形能绕着顶点拼.

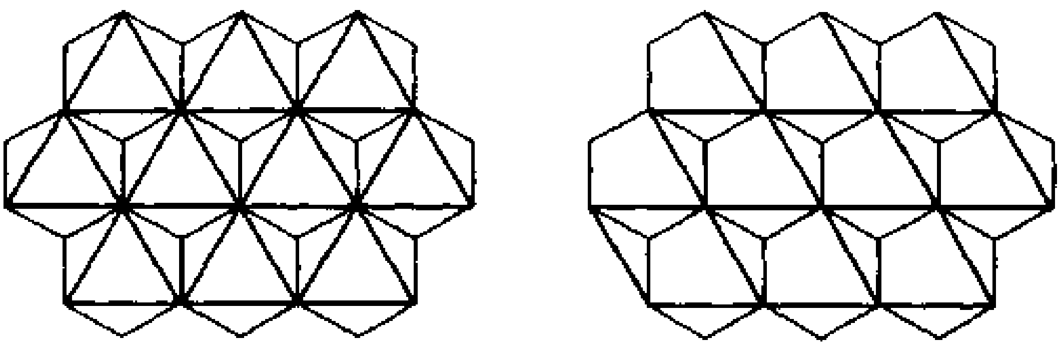
[143]



第一种可能不导致任一种半规则拼花.第二种导致两个可能的拼花,它们互相成为镜象,所以很多人会说它们本质上是同一种.

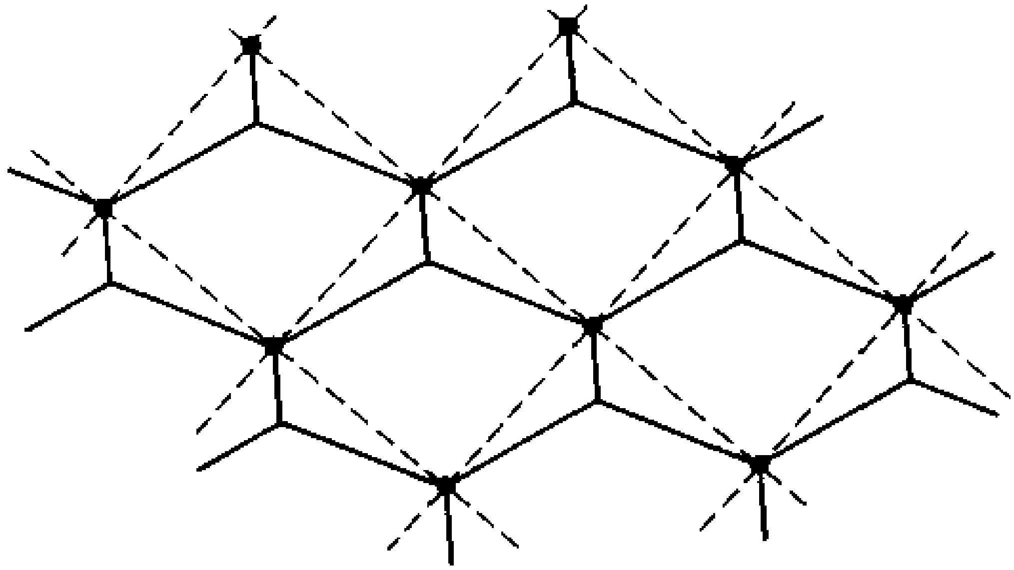
第三种可能导致唯一的一种拼花.

4.



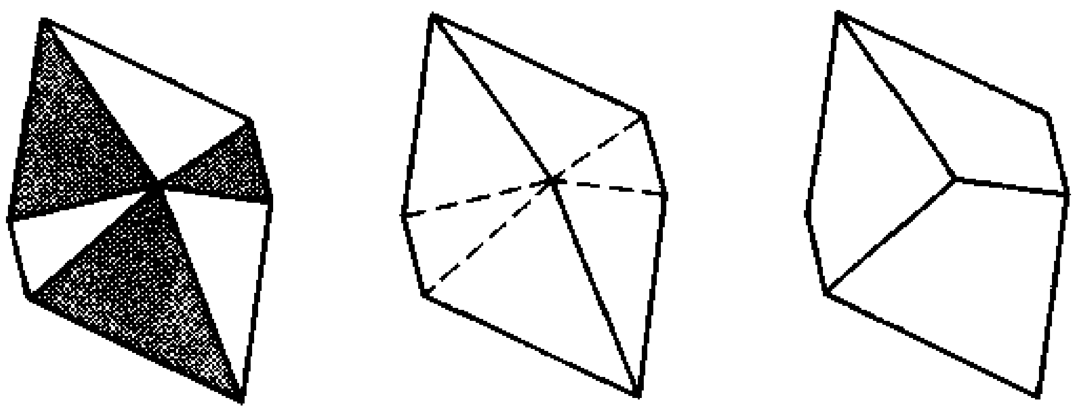
如果把每一个选出来的顶点与最靠近的顶点连接起来,结果是等边三角形拼花. 然而,它们也可以像第二个图那样连接,或者按别的方式连接. 连接顶点的方法不是唯一的.

5. 如果每一个选中的点与离它最近的四个点连接起来,它们形成正方形拼花,但这种连接方法不是唯一的可能.



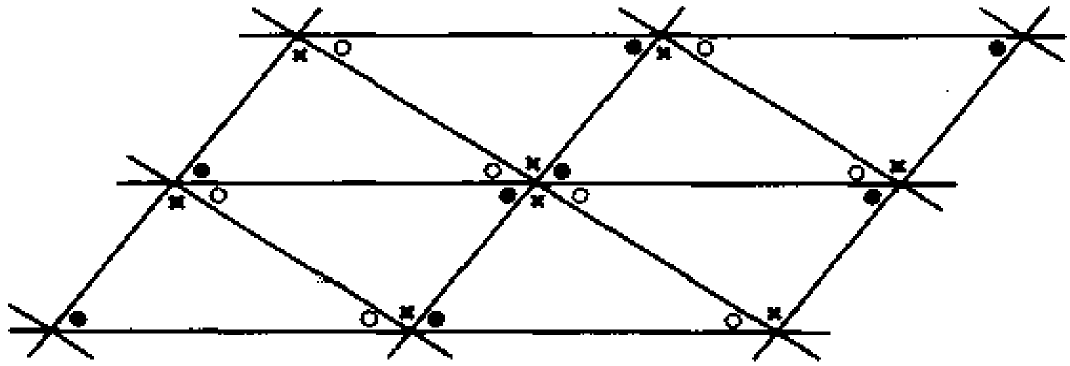
[144]

6．每一种情况的答案都是“能”，而且方法有若干种．这里就是对每一个问题的一种可能性．

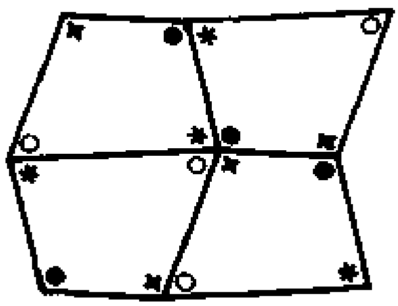


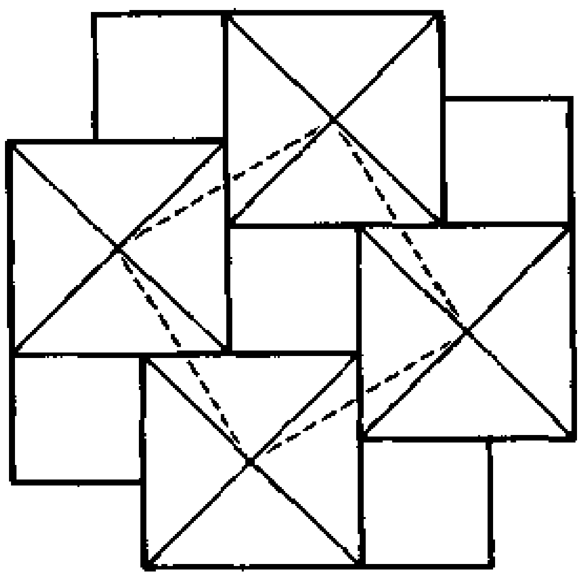
第 6 章

1．在每个顶点处三角形的三个角各出现两次，所以每个三角形的内角和的两倍是 360°，三角形的内角和是 180°．



2. 在每一个顶点处四边形的每个内角各出现一次,所以它们的和是 360°.



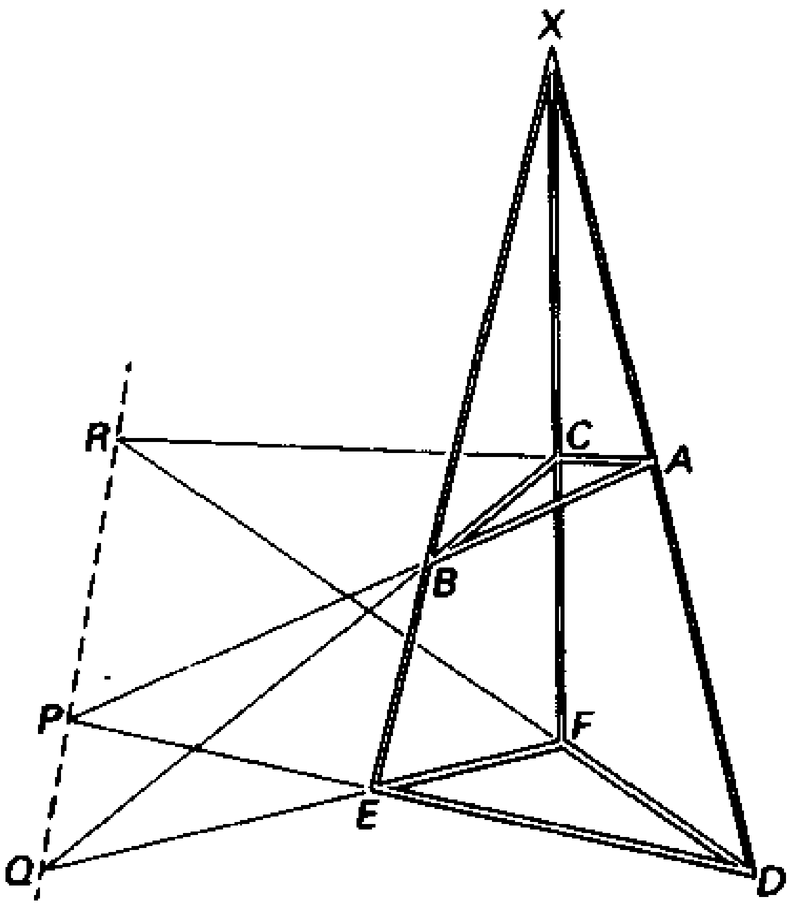


3. 阿拔尔·瓦发的图是用另一种方式看著名的、两种尺寸的正方形拼花.阿拔尔·瓦发是沿着四个对应点的连线切的. [145]

4. 这画成三维模型的是原图.从点 X 出发的三条腿构成三棱锥的棱.从 X 点引出的三条腿被上平面切得上三角形.下三角形是棱锥的底.

两个平面交于直线 L.棱 AB 与 DE 交于 L 上的 P 点.上平面,棱锥底所在平面以及棱锥的侧面 $ABDE$ 都会于这点.

棱 BC 和 EF 交于 Q 点,上平面,底面和棱锥的侧面 $BCEF$ 会于这点.类似地,棱 CA 与 FD 交于点 R.



5. 每行是上一行相邻两数的差.为了在最上面一行中求出下一个数,应把全是 24 和全是 0 的两行继续写下去,然后把 24 加到 102 上,向前逆推,如此继续下去:

0		1		12		63		208		525		1116		2107				
	1		11		51		145		317		591		991					
		10		40		94		172		274		400						
			30		54		78		102		126							
				24		24		24		24		24		24		24		...
					0		0		0		0		0		0		...	

6. 通过求出相继两项的差,将模式造得尽可能远.我们就得到表:

```
6       15      40      -       162     271     420   615    862
    9       25                      109     149    195    247
       16                               40      46     52
                                            6       6
                                                0
```

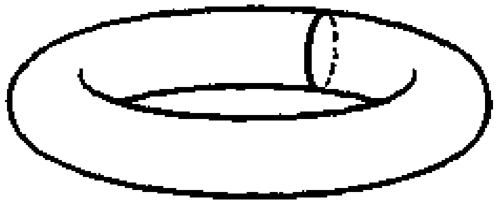
[146]

如果模式与问题5属于同一种，那么全是0与全是6的行一定向右穿过这表．向前逆推，表中所缺的部分就能重新造出来，如：

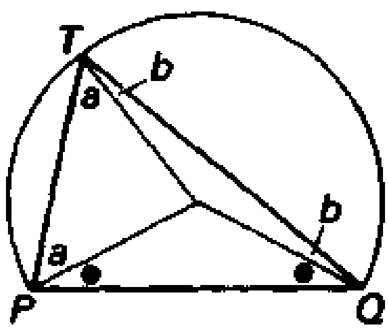
```
              40      87      162
          25      47      75       109
      16      22      28      34       40
  6    6      6       6       6       6      6      6
     0     0       0       0       0       0      0
```

第7章

1．这是个轮胎，或者叫做环面或圈饼．如果像这样在环面走一圈，那么，环的表面不被分成两个部分，而这个圆可以说没有内外的区别．

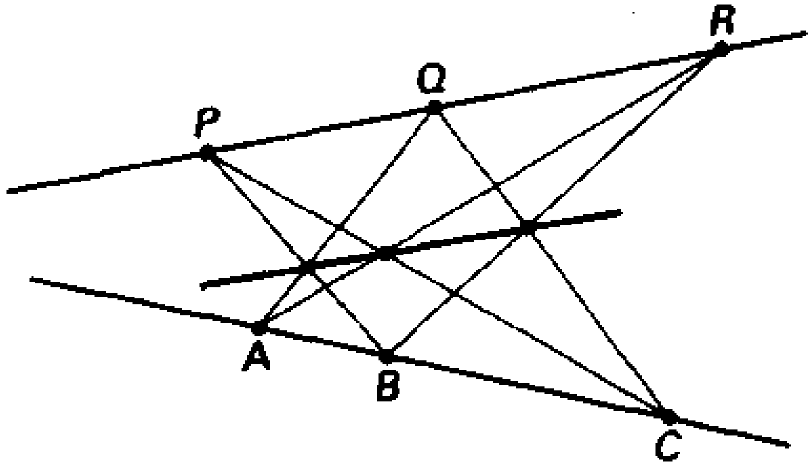


2．角 PTQ 总是相同的．如果三个点都与圆心相连，做成3个等腰三角形，便可看出这一点．比较第4章问题2．



用黑点标出的角不变．三角形 PTQ 的内角和不变，因为它总是 $180°$．所以角 a,a,b,b 的和不变．于是，$\angle PTQ = a + b$ 不变．

3.



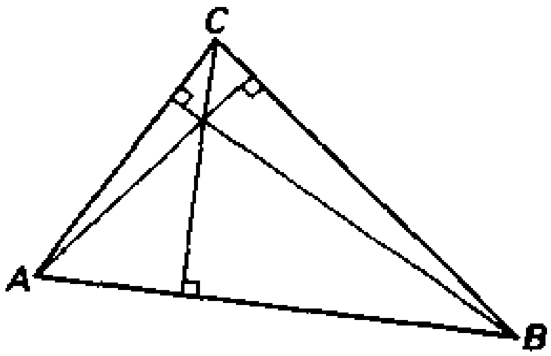
AQ 与 *BP*，*AR* 与 *CP*，*BR* 与 *CQ* 的交点总是在一条直线上. 依照发现它的希腊几何学家的名字，这条定理称为帕普斯定理.

[147]

4. 当分子与分母同时乘以或同时除以同一个数时，分数的值不变. 例如，$\frac{84}{144}$，分别用 2，3，4，6 与 12 同除分子与分母，可以依次化为分数 $\frac{42}{72}$，$\frac{28}{48}$，$\frac{21}{36}$，$\frac{14}{24}$，$\frac{7}{12}$.

5. 极限比值是关于开头几个数的不变量. 不管开头的几个数如何选取，比值趋向黄金比.

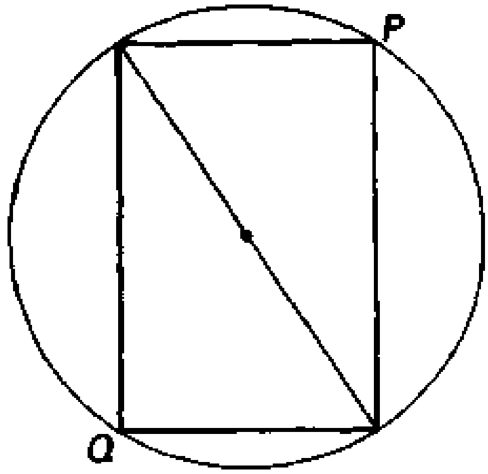
6. 不管原三角形是什么样的，三条高总是交于一点.



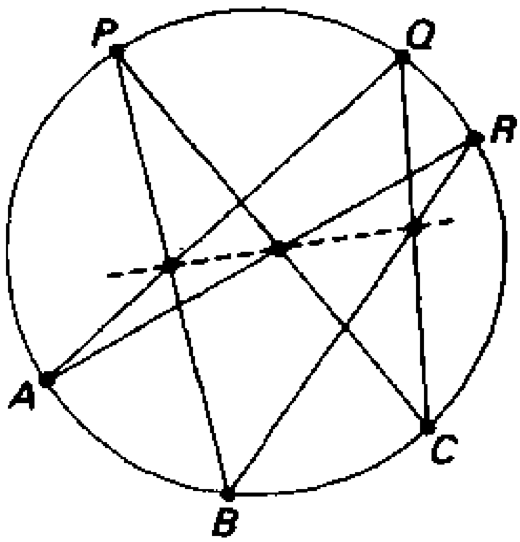
第 8 章

1. 圆内接四边形的一对对角和是 180°(第 1 章第 14～15 页)，由

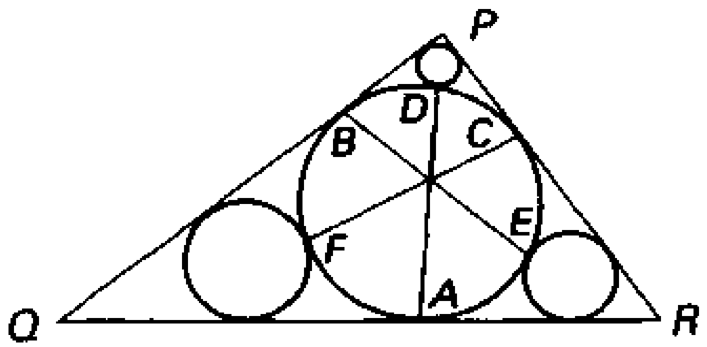
于角 P 与 Q 相等，每一个必为 $90°$. 这“半圆上的角是直角”被认为是最早的希腊数学家之一泰尔斯(Thales，公元前 624? — 公元前 546)发现的.



2. 是的，帕普斯定理对任意圆锥截线都成立，即使只在圆或椭圆上验证. 这里是一个说明.



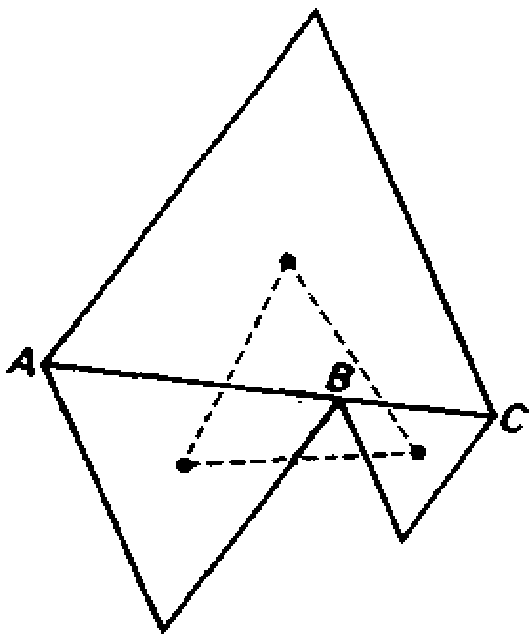
3.



越变越大的三个圆在极限情况下变成直线，这种结果如图. PQR 可以是任意三角形. 和前面一样，直线 AD，BE 与 CF 相交于一点.

[148]

4.



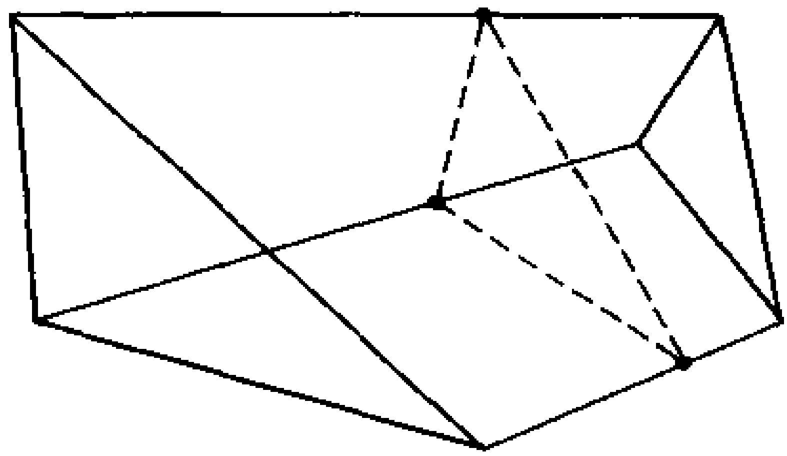
这个定理仍成立. 它就是说，如果两个等边三角形作在另一个等边三角形的底边的两部分上，它们的中心构成第四个等边三角形.

5. 托勒密定理说 $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$. 由于矩形的对边相等，对角线也相等，并在这种情况下，对角线一定是圆的直径. 托勒密定理变成：

$$AB^2 + AD^2 = BD^2.$$

这就是关于三角形 ABD 的毕达哥拉斯定理. 如果我们并不知道因为 BD 是直径所以 $\angle BAD$ 是直角,那么,这个结论会告诉我们它是直角,因为毕达哥拉斯定理的逆定理也成立,即如果 $AB^2+AD^2=BD^2$,那么,$\angle ABD$ 是直角.

6. 当相似三角形退化成线段时,它们变成分为相同比的线段. 在这个图里,原阴影三角形的对应顶点用线段相连,这些线段被分成 2:1. 作为解释,即从左向右是线段长的三分之二. 如所预期的,三个分点是与原阴影的一对三角形相似的另一个三角形的顶点.



喜欢自己画图的读者可能喜欢做试验:让原阴影三角形的两个顶点移近,然后重合. 这个结果是拿破仑定理的推广. [149]

第9章

1. 把顺排与逆排的两个级数加起来,如:

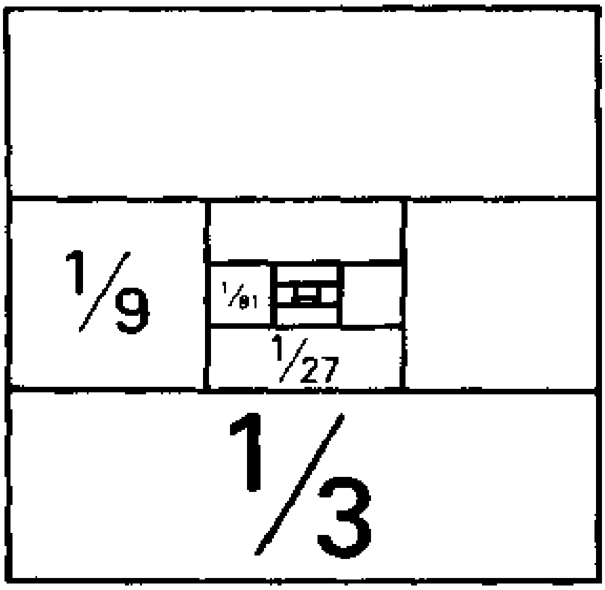
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10,$$

$$10+9+8+7+6+5+4+3+2+1,$$

$$11+11+11+11+11+11+11+11+11+11=110.$$

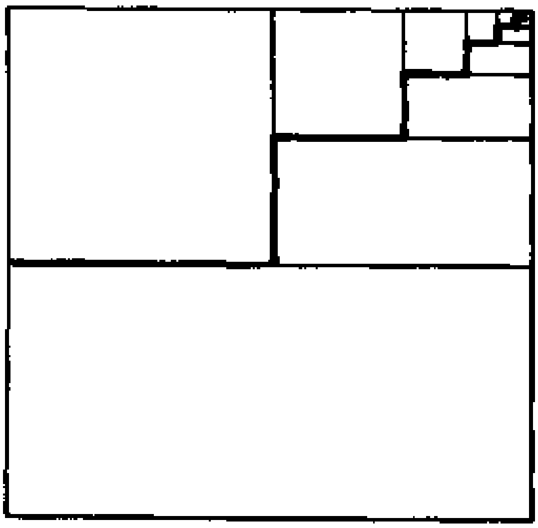
于是,原来的和是这个和的一半,即 55.

2.



当越来越多的小块填充进去时，余下的空间同已填的面积形状恰好一样，只多中心的一小块，在那里“活动”还在进行.

3.



上面的正方形系列同下面的矩形系列恰好两两相配，但每个正方形是相应的矩形面积的一半.

于是，这条线把整个正方形分成两部分，其中的一部分是另一部分的两倍. 所以上面正方形系列的和是正方形的三

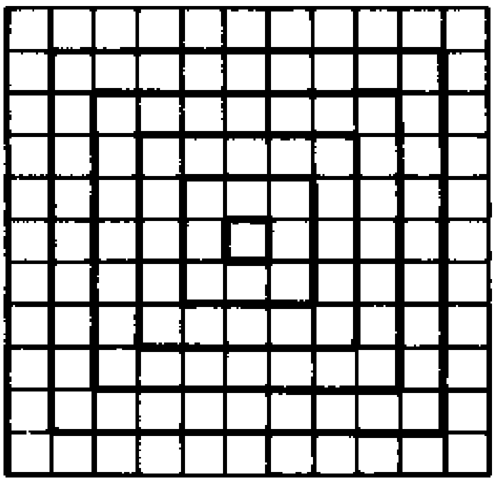
分之一，而下面矩形系列的和是三分之二.

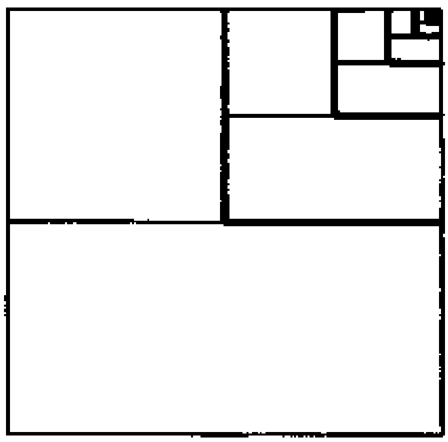
4.

①+(2 + 3)+(4 + 5)+(4 + 3)+(2 + 1)

从左端取“1”，从另一端取“1+2”，然后从左边取“2+3”，如此等等.

总和是 1+3+5+7+9. 〔150〕





5. 级数的头一项“1”在中心位置上.围着它的方环分别有 8，16，24，32，与 40 个正方形.五个环，加上中心正方形做成一个 11×11 的大正方形.

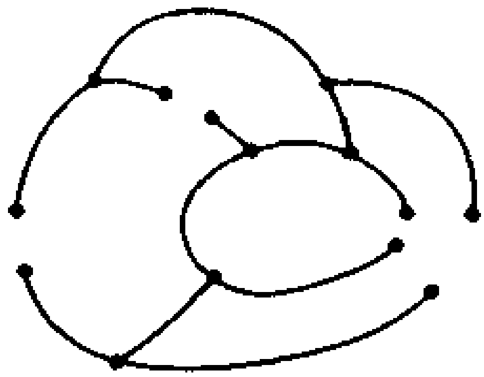
6. 这一系列的 L 形向右上角无限地继续下去.

最大的 L 型是整个正方形的$\frac{3}{4}$，次大的是$\frac{3}{16}$，如此等等.

第 10 章

1. 对.这就是叙述通常求矩形面积的规则.

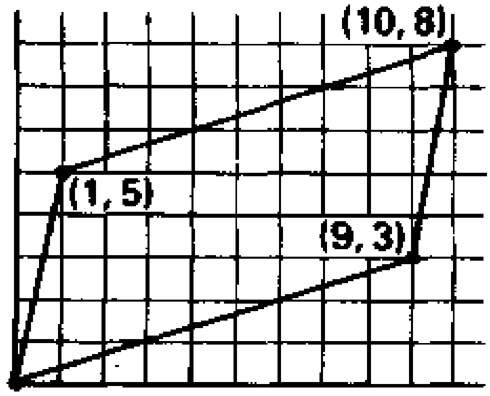
2. 对.由于它们都是边的端点，为了同地图的顶点对应，树的端点与它的分支点必须算在一起.



为了清楚地看到对应,从刚好够数的边上各切开一小段使得地图的所有区域均与外面相连,这样一来地图变成了树,围绕树的空间算一个区域.

每切掉一段,一条边变成了两条,一个区域消失了,端点数增加了两个.总起来说,$V+R$ 与 $E+2$ 的差仍旧是零.

3.



把每个点同原点连接起来,然后作成一个平行四边形,

[151] 如图所示.这个平行四边形的远顶点是原先两个点的"和".

4. 把 n^2 写成$\frac{1}{2}(2n^2+0)$,模式成为:

三角形数	平方数	五边形数	六边形数
$\frac{1}{2}(n^2+1n)$	$\frac{1}{2}(2n^2+0n)$	$\frac{1}{2}(3n^2-1n)$	$\frac{1}{2}(4n^2-2n)$

六边形数的公式简化为 $2n^2-n$.

5. 每一对数总是相同的.可以这样看出:考虑放肥皂泡与树的

边的过程，一次一个（或一条）. 首先决定有多少个肥皂泡不在任何其他肥皂泡里边，有多少条边在树根上相交.

然后，在边的端点接上的新边的个数与直接放入先前肥皂泡里的肥皂泡的个数相等.

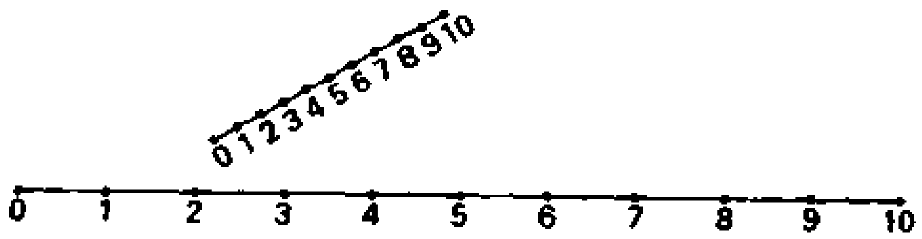
6. "两个数的平均值比这两个数，等同于在刻度尺或数轴上，两数中点的位置比这两个数的位置."

（显然还有别的可能的措词.）

第11章

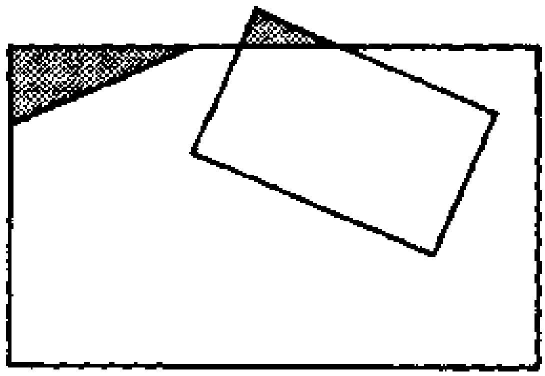
1. 论证只在作为求近似解的方法时是合理的. 解题者找到一块小面积，它在每张地图上的坐标大致相同. 它不能对公共点的位置作精确的计算，事实上，它根本没有证明公共点存在.

2.



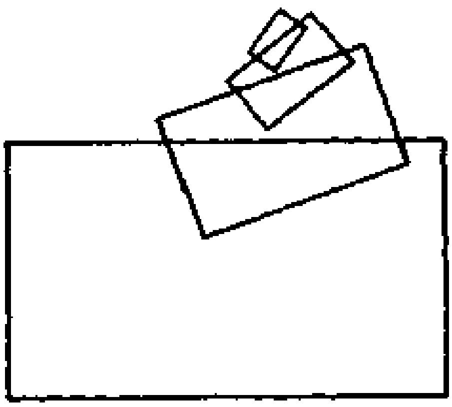
只要原先的小地图确实整个地在大地图里面，二维的类比成立. 因为问题的论证仍然有效，在两条直线不平行时，只要选择一个方向，用它"对应". 从而，一维的论证可以分开来应用于每张地图平行于上、下边的直线及平行于左右边的直线.

3. 这是对的. 如果地图不完全重叠，有时没有公共点. 为了检验公共点的存在性，在大地图上划掉一部分面积，它对应于小地图溢出边界的部分. 结果仍是两张地图，不再是矩形的. 如果小地图整个在大地图里面，那么可以用另一些问题的论证.



[152]

4.



这个论证正确，如果公共点确实存在. 如果系列中充分小的地图完全不与原先的地图重叠，这就证明不会有公共点.

5. 如果公共点存在，这种几何作图——细节仍有待于详述——可以作出它、但公共点是否存在却什么也没有说.

6. 如果公共点存在，这个解法可以求出公共点，但它也未能证明这个点是否存在.

结论：为了发现公共点是否存在，用问题 2 的论证(解法). 如果点真的存在，那么，可用上述后三个论证中的任何一个求出它的确切位置.

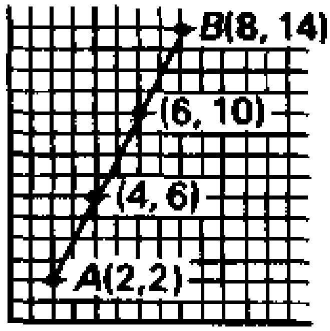
第 12 章

1. 所求的点离 B 是离 A 的两倍，所以不足为奇，给 A 的重量是

B 的两倍，便可算出这点.

计算 $2\times(2,2)+(8,14)$并将答数除以 3.

$2\times(2,2)+(8,14)=(12,18)$，$(12,18)\div 3=(4,6)$.

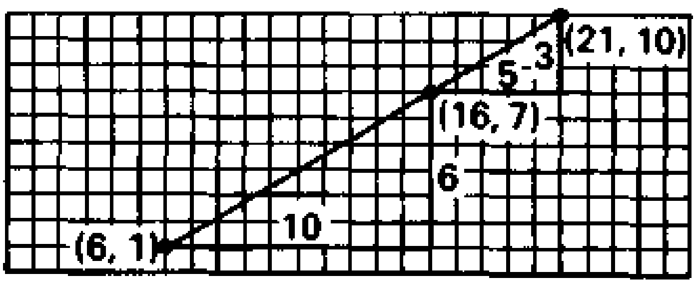


把 A 与 B 的作用对换一下就产生离 A 是离 B 的两倍的点：

$(2,2)+2\times(8,14)=(18,30)$，$(18,30)\div 3=(6,10)$.

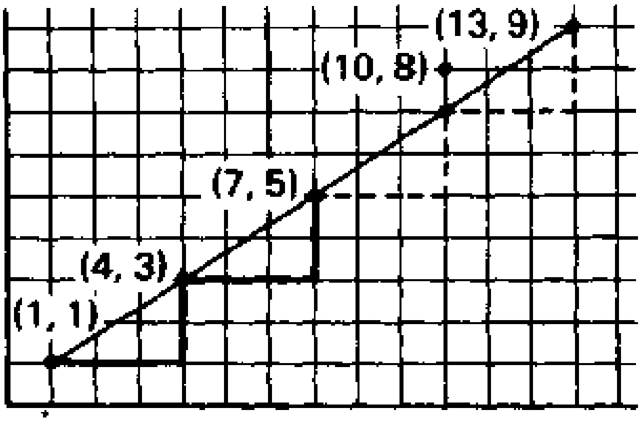
2. 是的，它们都在一条直线上，这条直线看上去像有两级形状相同但一个是另一个两倍长的楼梯.

这可以算出，不需这样画图. 从点(6,1)到点(16,7)是 10 右 6 上，从点(16,7)到点(21,10)是 5 右 3 上，正好是大台阶的一半. 所以台阶形状相同，它们都在一条直线上.

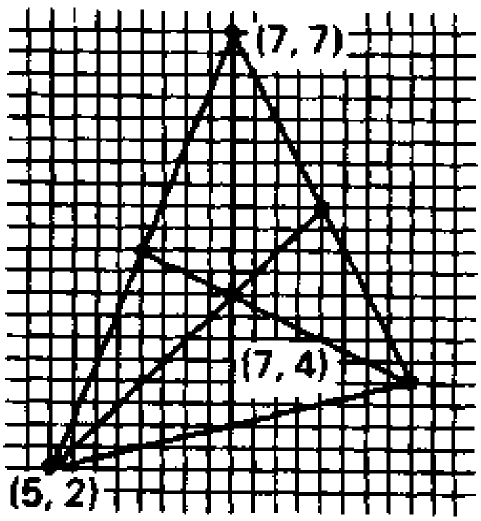


[153]

3. 从一点到下一点的移动是，3 右 2 上，3 右 2 上，3 右 3 上及 3 右 1 上. 第一个变化在第三次移动上，3 右 3 上. 只要点(10，8)用(10，7)来代替，那么这变成 3 右 2 上，而且由它到点(13，9)的最后一个移动也是如此. 画一个图可以验证这给出了答案. 点(10，8)不在这线上，这条直线通过所有其他点.



4. 如果将三角形的每个顶点与对边中点用直线连接起来，这三条线都过同一点，这一点称为三角形的重心. 这个点正是使三角形达到平衡的点. 问题中的计算求出这个点的位置.



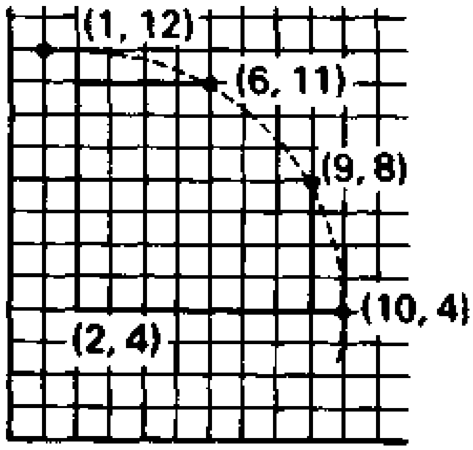
5. 能，只要在两个点的"平均"(6,5)处放余下的点(3,8)的重量的两倍. 于是，计算是：

$$2\times(6,5)+(3,8)=(15,18),(15,18)\div 3=(5,6).$$

(5,6)是这三个点的平均，而且是这三角形的重心，不论平均为(6,5)的那一对点如何选.

6. 对的，但点(10,4)除外. 从点(2,4)向给定点的移动是7右4上，4右7上，1左8上及8右0上：

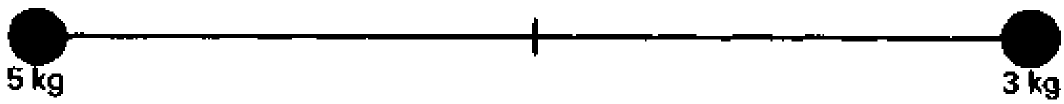
由毕达哥拉斯定理,从点(2,4)到每一点的距离平方是 $7^2+4^2, 4^2+7^2, 1^2+8^2$ 及 8^2+0^2. 除去最后一个应该去掉的不合格的数,它们都等于 65.

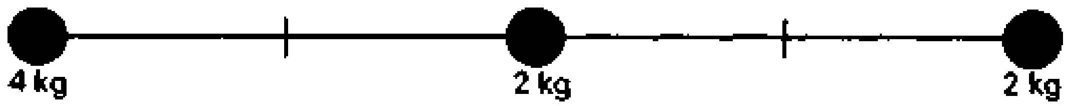


[154]

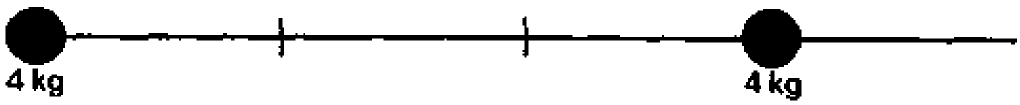
第 13 章

1. 从每一个重量取出 1 千克重,它们等价于在中点有 2 千克重.

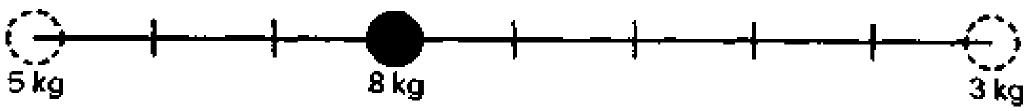




一对 2 千克重现在等价于 4 千克重,如图所示.

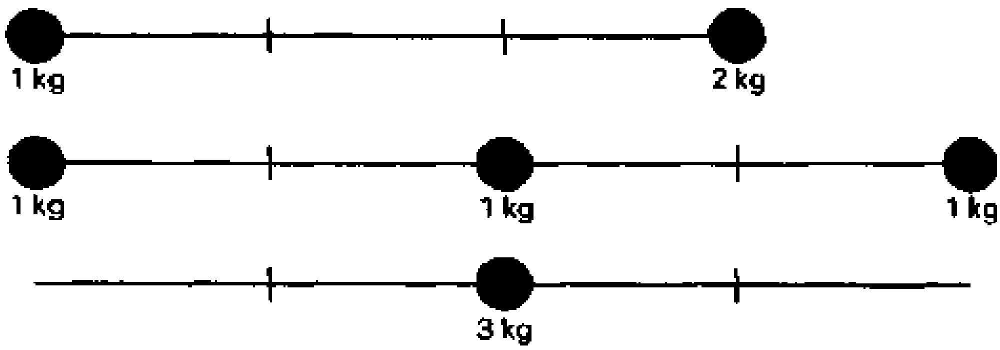


一对 4 千克重现在在它们的中点平衡,于是,这点也是原先重量的平衡点.



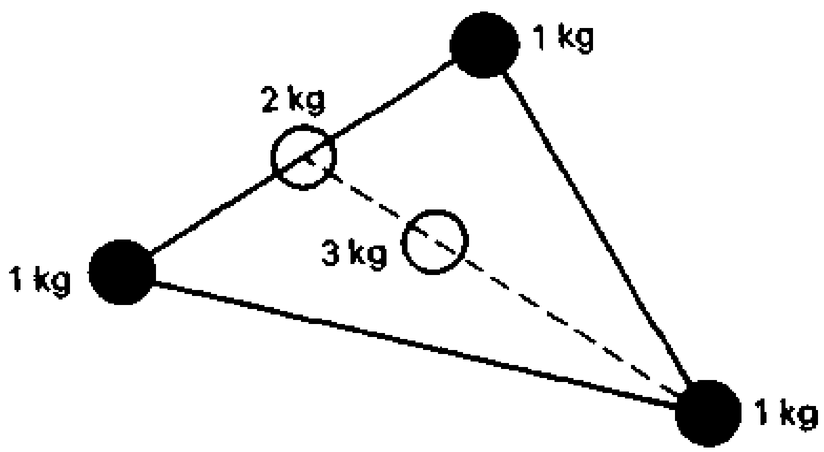
2. 把 2 千克重分为两个 1 千克重,如图所示,这个图中,连接中

心的线已经被分成 n 个 $\frac{1}{3}$. 左边与右边的 1 千克重现在等价于在中点的 2 千克重，与第三个 1 千克重在相同的位置上.



于是，原先的重量在离 1 千克重为离 2 千克重两倍的点上取得平衡.

3. 它们中的任意一对等价于在它们的边的中点上放 2 千克重.



按照问题 2，这两个重量将在从 2 千克重到另一个顶点距离的三分之一处取得平衡.

[155]

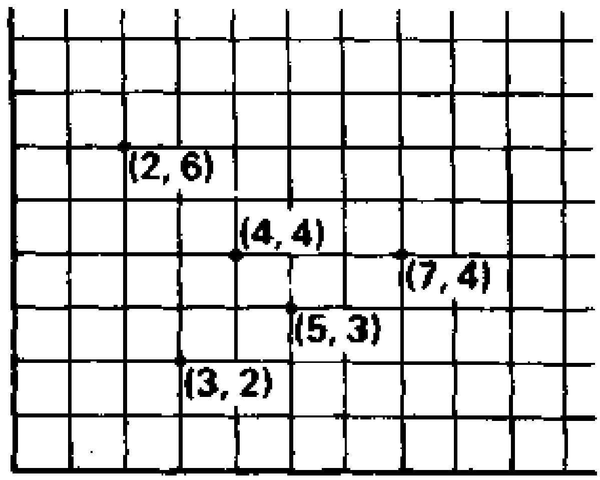
4. 由实际画图得中点是(5,3). 也可以这样来算：取 3 与 7 的平均数(5)，以及 2 与 4 的平均数(3).

增加第三个点(2,6)时，为了求平衡点，我们可以仿照问题 2，求出从点(5,3)到点(2,6)的三分之一处的点. 从 5 到 2

的三分之一处是 4,从 3 到 6 的三分之一处也是 4. 所以这些点在点(4,4)平衡.

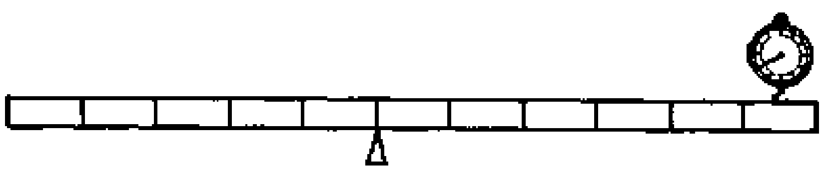
一种更直接但不大显然的算法是计算:

$\frac{1}{3}(3+7+2)=4$ 及 $\frac{1}{3}(2+4+6)=4$.



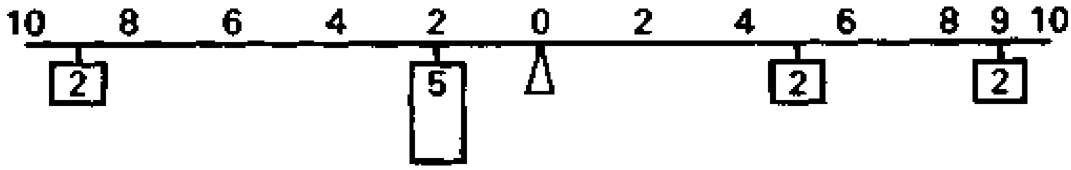
这个问题实际上与前一章问题 5 相同.

5. 把木条分成适当多的部分,究竟分成多少部分要看木条有多重,你的小秤可以秤多少重量. 例如,分成 11 份也许足够了:



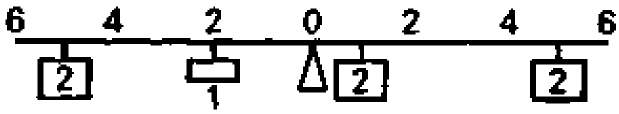
把楔形支承放在第 5 条分线下面. 现在 10 个部分在楔形支承上平衡. 你要做的是把秤直接系在第 11 份的中点上面,称出第 11 份的重量. 现在整个木条平衡了,它的总重量是秤上读数的 11 倍.

6. 可以. 简单的答案是因为重量到支承的距离与对面重量到支承的距离成比例. 怎样证明这一点使结论成立?



从 9 千克重中分出对面重量的两倍,4 千克重,把它像图中那样分配.外侧的一对 2 千克重在支承上平衡,于是,问题化为更简单的余下的 5 千克重与 2 千克重的平衡问题.

[156]

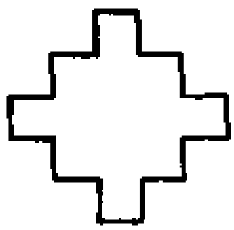


重复前面的过程,分出并重新分配一对 2 千克重.那么,问题化为在 1 处的 2 千克重和在 2 处的 1 千克重,我们知道这些重量的确是平衡的.

这个过程应用到任意一对初始重量,每一个重量与支承的距离与另一个重量到支承的距离成比例.每个问题化为重量较小的同样问题……最终取决于最简单的已经解决的一类问题.

第 14 章

1. 都是.
2. (a)与(b)正确但(c)不对,因为"差"可能是指它们之间的正的差,也可以是从一个中减去另一个,在这个情况下与次序有关.
3. 都是.
4. 都是.
5. (c).由于陈述中没有说是内角等于直角,有无穷多个满足条件的多边形不是正方形.最简单的是希腊十字,由 5 个完全相同的正方形组成.这里是一个更复杂些的例子.

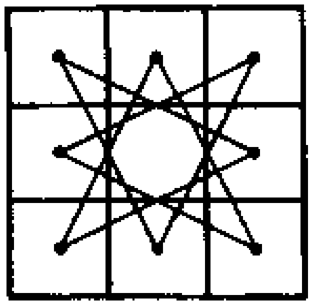


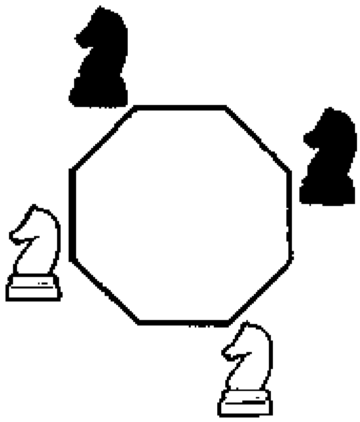
6. 都对，只要能解释一些负数的性质.如果两个负数都是温度，那么，它们的乘积是什么不清楚了.这些情况中没有一种能容易地解释负数的平方根.

第15章

1. 杜登尼用的方法，称为他的"钮扣与线"法.首先他在板上画出所有可能的马步，这些直线即所谓的线.

然后他拉开这些线形成一个简单的圈，在圈上他标出了四匹马的位置.

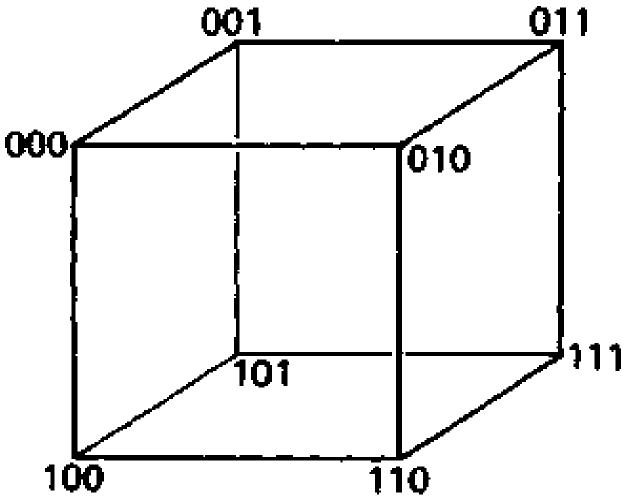




现在很容易看出来最小解只需走7步(记住用同一个棋子连续地跳算作一步).

[157]

2. (a)与(e)等价，因为八个二进制数可以放在立方体的顶点上使相邻顶点恰好有两对数字相同，如：



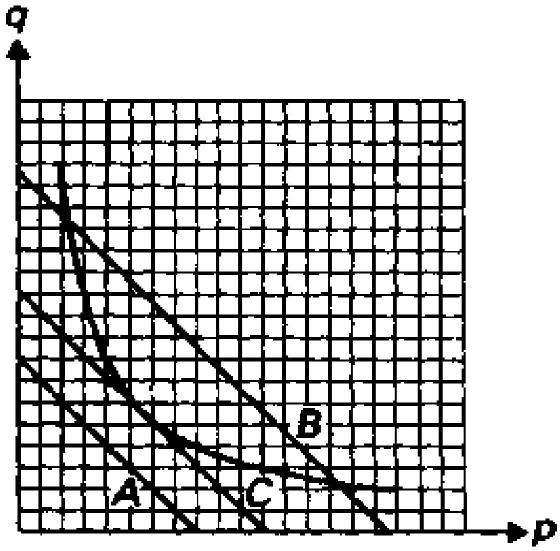
(b)与(d)等价，因为这是任意二次方程的性质，当方程写成本题形式时，两根的和是右边项的系数，而它们的积是左边的常数项.

例如，在方程 $p^2+12=7p$ 中，两根和是 7，它们的积是 12，所以容易看出它们是 3 与 4.

(c)与(f)等价，因为两个数的积可以表示成矩形的面积，它的边是这两个数. 说它们的和是 10 等于说绕矩形一周，两条不同边都算两次，所走长是 $2\times10=20$. 当两个数相等时，它们的积取得最大值，矩形成为正方形.

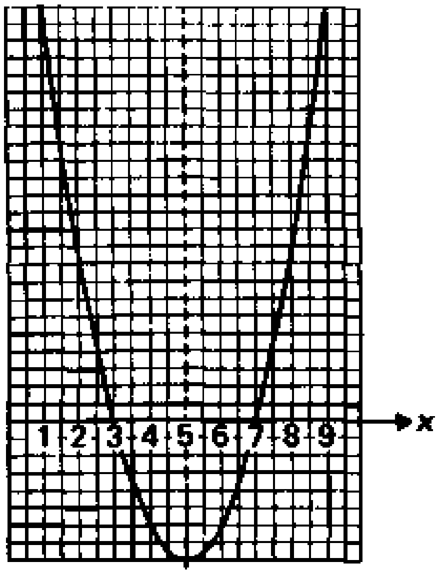
第 16 章

1.



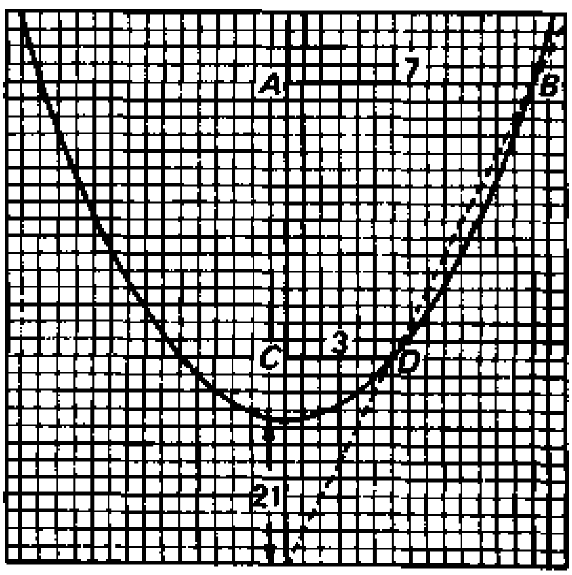
不管 $p+q$ 与 pq 的值是什么，在这个图中，它们的图象总是关于对称轴对称的．然而，直线不一定穿过曲线．有时它在左下方离曲线很远（直线 A），有时它与曲线相交于两个点（直线 B）．而有时它恰好与曲线相切（直线 C），在这种情况，只有一个解． [158]

2.



由于 3 与 7 的和是 10，3 与 7 的平均值将是 10 的一半，即 5．在这个图中，$x=5$ 表示抛物线的轴，它正好在使 $x^2+21-10x$ 等于零的两个点之间一半的地方．

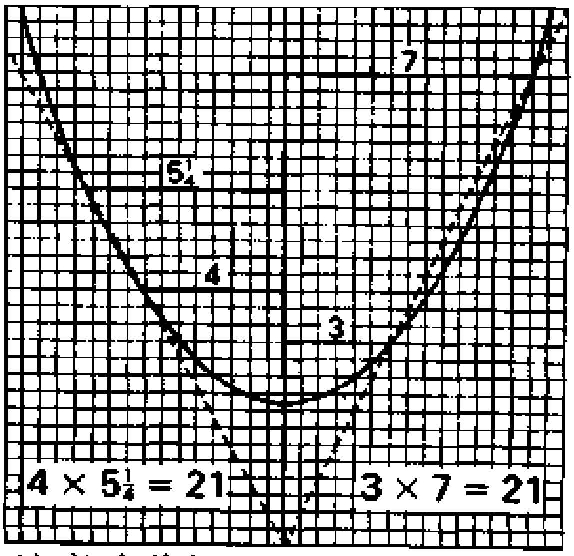
3.



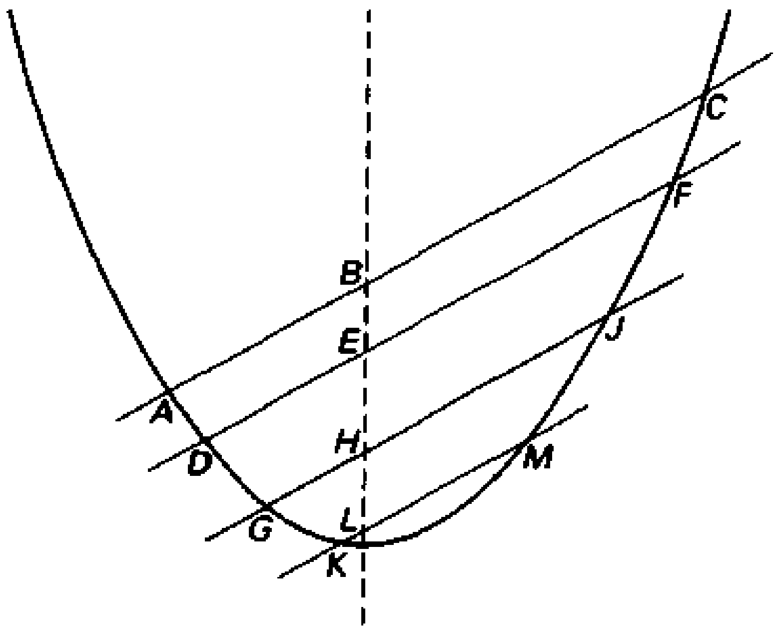
抛物线的最低点到原点的距离是 21，不管这直线画在哪里. 在现在的情况，3 与 7 是两个点到抛物线的对称轴的距离，几何解释是 $AB \times CD = 21$.

如果认识到 21 的图解只依赖于抛物线，这就变得更加有趣了. 直线的位置完全没有影响，任何一条线都是这样.

[159]



一般地，这意味着如果画出任意一条抛物线，然后画经过它轴上同一点的若干条直线，那么，各对交点到轴的距离的积总是相同的.



$BC \cdot AB = EF \cdot DE = HJ \cdot GH = LM \cdot KL$

类似地，性质“解的和只依赖于直线”，翻译成抛物线的这条性质：如果若干条互相平行的直线与抛物线相交，那么，交点到对称轴的距离的和是常数. 至于这些距离是到轴的垂直距离或是沿着直线测量的距离没有关系. 但，轴两侧的距离，必须一侧算正，另一侧算负.

4. 当 $x=1,2$ 及 5 时，$x^3+17x=8x^2+10$. 三个解的和是 8，而它们的积是 10.

5. 如果按标准规则由 1,2 与 5 可以算出 17，那么，计算必定是对称的，因为解 1,2,5 的每一个都与其他的一样好. 事实上，$17=1\times2+2\times5+5\times1$.

6. 用书中的思想，解称为 $7-x$ 与 $7+x$，它们的积是 50：

$$(7-x)(7+x)=50,$$
$$49-x^2=50,$$
$$x^2=-1,$$

所以 $$x=i.$$

因而两个解是 $7-i$ 与 $7+i$（两个复数，它们不能在数轴上标出来）. [160]

第 17 章

1. 一般地，给定任意四个数，总可以找到同 $4n^3-18n^2+32n-15$ 类型相同的三次公式，当 $n=1,2,3$ 与 4 时，这公式得出那四个数.

在目前的情况，系数 4，−18，32 与 −15 是仔细选择的，以得出数值 3，9，27，81，看上去好像是 3 的幂的数列，但这只是错觉. 当 $n=5$ 时，表达式等于 195.

2. $\frac{1}{49}$的确等于包含 2 的幂的无穷级数的和：

$$\frac{1}{49}=\frac{2}{100}+\frac{4}{10000}+\frac{8}{1000000}+\frac{16}{100000000}+\frac{32}{10000000000}+$$

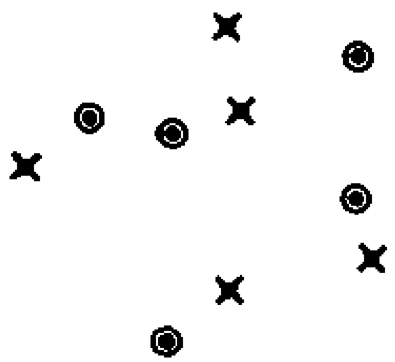
$$\frac{64}{10000000000000}+\cdots$$

因此，$\frac{1}{49}$的十进小数，像这样写下 2 的幂并把它们相加，就可以算出来：

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{49} = 0.02&\\
04&\\
08&\\
16&\\
32&\\
64&\\
128&\\
256&\\
512&\\
1024&\\
\cdots&\\
0.020408163265306122\ldots&
\end{aligned}$$

在$\frac{1}{49}$的十进小数中，一碰到 2 的幂次互相重叠(总会如此)，模式就破坏了，或者像是破坏了.

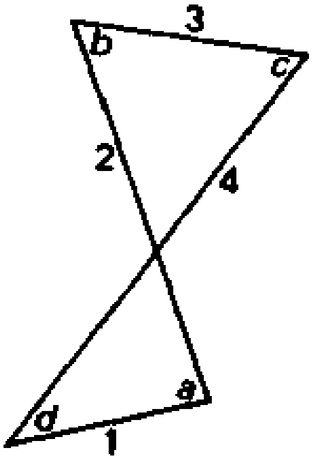
3. 有的.模式由五个点的一个模式的两个复制品组成.



4. 不，因为数列中的下一个数 65，是 5×13.任何一个比 6 的倍数大 2 或小 2 的数必定是偶数，一个比 6 的倍数大 3 或小 3 的数必定被 3 整除.

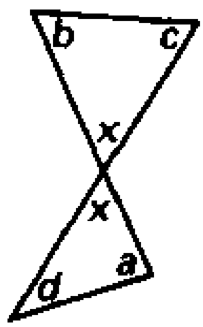
因此，所有素数都是比 6 的倍数大 1 或小 1 的数. 这个数列中的数恰好也比 6 的倍数小 1. 由于有相当多的小素数（因为它们可能有的因子组合不多），5，17，29，41，53 都是素数就不奇怪了.

5. 四边形的内角和是 360°这个“事实”可以部分地挽救. 一种方法是把角想成线转动的结果，例如，顺时针转动算正，反时针转动算负.



在图中，直线 1 顺时针转到与直线 2 重合，所以角 a 是正的. 直线 2 反时针转到与直线 3 重合，所以角 b 是负的. 类似地，角 c 是负的，而角 d 是正的.

如果现在我们把角加起来，结果当然不会是 360°，实际上它是 0°. 而 0°或 360°旋转意味着你做完的时候正回到你的起点.



比较下一个图的三角形，就会看到 $a+b+c+d=0$（如果 b 与 c 算作负的）或 $a-b-c+d=0$（如果它们都算作正的）. $b+c+X=180=a+X+d$，所以有 $b+c=a+d$，即 $a-b-c+d=0$.

6. 毫不奇怪，数学家已经发现每一行差数的第一个数显然总是 1，这个“事实”已经用计算机一直检验到第 63418 行. 然而，没有一个人能够证明它永远如此.

第 18 章

1. 藉助于用不同数做试验，可以验证乘法表的极其重要的性质是：无论你先把一些数乘在一起，再用 6 除，最终算出余数，还是先求出这些数各自的余数，再把它们乘在一起，然后用 6 除求出余数，或者用这个表把它们的余数乘起来，都没有差别.

例如，$7\times5\times10=350$，用6除后得余数2.数7，5与10用6除后余数是1，5与4.而$1\times5\times4=20$，用6除后得余数2.最后，由表查出，$1\times5=5$及$5\times4=2$.答案相同！

[162]

两张表格的模式的差别是什么？

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

×	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

左边 mod 6 的乘法表是一张更有活力的表，有几个孤立的零，在一些行与列中有一些重复的数.

右边是 mod 7 的乘法表，比起 mod 6 的表，它显得少一点生气.

6与7之间的重要的、与本题有关的差别在6是合数，等于2×3，而7是素数，除去本身与1没有因子.

2.

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	0	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	0	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	0	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	0	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	0	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	0	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	0	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	0	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

这是 mod 11 的正确的乘法表.同 mod 7 的表一样，在

零行与零列之外不含零，因为 11 是素数，在任何行与列内没有数重复. 问题中的两行有一个零并且 1,4,5,7 重复出现(更不用说有一个 12 了)，所以是错的. [163]

3. mod 11 的乘法表的每一行与每一列，除去零行与零列，都有 10 个位置，要用小于 11 的数(没有零与重复的)去填. 所以从 1 到 10 的每个数在每行与每列中确实只出现一次.

4. 为了便于讨论，假定 $n\times n$ 被 11 除后余数是 1，于是 1 出现在长对角线的第 n 行与第 n 列的交叉点上. 于是，差 n^2-1 恰好被 11 整除也应该是对的.

现在，用一点众所周知的代数，$n^2-1=(n+1)(n-1)$. 于是：如果 n^2-1 可以被 11 整除，那么，素数 11 将整除 $n+1$ 或 $n-1$ 中的一个. 这是不可能的，因为 $n+1$ 与 $n-1$ 这两个数都小于 11，除非 $n+1=11, n=10$，或 $n-1=0, n=1$，我们已经知道这两个答案.

5. 想一下 mod p 的乘法表. 每一行按某种次序包含数 1 到 $p-1$. 特别是每行包含一个 1.

1 出现在第一行的首位及最后一行的末位. 此外，它不出现在长对角线上，并且每个 1 对应于乘积是 1 的一对不同的数.

写下所有这些数对，那么，从 2 到 $p-2$ 的数都会被包括在内.

这里是 mod 11 的表中的数对：

$2\times6=1, 3\times4=1, 5\times9=1, 7\times8=1.$

6. 再次想一下 mod p 的乘法表. 像上题那样，将数 2 到 $p-2$ 两两配对，然后把它们都乘在一起. 这是对于 $p=11$ 的结果：

$$\begin{aligned}&2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\\=&(2\times6)\times(3\times4)\times(5\times9)\times(7\times8)\\=&1\times1\times1\times1=1.\end{aligned}$$

现在用剩下的两个数，1 与 $p-1$，在目前的情况就是 10，乘这个积：

$$1\times(2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9)\times10$$
$$=1\times1\times10=10.$$

一般情况，积是 $p-1$. 这是 $1\times2\times3\times4\times5\times\cdots\times(p-2)\times(p-1)$ 被 p 除后的余数.

如果原先的数增加 1，对余数，会发生什么情况？余数也将增加 1，因此余数将是 p.

但是等一等！当我们用 p 除时，如果余数是 p，那么商实际上应该增加 1，从而完全没有余数. 换句话说，

$$1\times2\times3\times4\times5\times6\times\cdots\times(p-2)\times(p-1)+1$$

[164] 恰好被 p 整除，这正是威尔逊定理要说的.